

## UN ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO DEL BINOMIO DE NEWTON A LA SERIE DE TAYLOR EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL

Hipólito Hernández Pérez

CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas

polito\_hernandez@hotmail.com

Campo de investigación: Socioepistemología

México

Nivel: Superior

**Resumen.** *En esta investigación buscamos elementos de interacción entre los contenidos de los fenómenos físicos y el cálculo como una alternativa didáctica de la enseñanza-aprendizaje de las asignaturas de cálculo, física e ingeniería en el nivel universitario. Exploramos el fenómeno de estabilidad en sistema discreto de una partícula sobre una superficie lisa para determinar la energía potencial, consideramos a la predicción como práctica social, el binomio de Newton a la serie de Taylor como herramienta de interpolación para obtener un modelo matemático y el análisis de la energía potencial y los conceptos de máximo y mínimo dentro del marco de la aproximación socioepistemológica.*

**Palabras claves:** Socioepistemología, predicción, práctica social, estabilidad

### Introducción

En los programas de estudios de cálculo, física e ingeniería de las instituciones de educación superior están los contenidos de máximos, mínimos y el fenómeno físico de la energía potencial respectivamente. En el discurso de la matemática escolar actual se ha visto que estos contenidos están desvinculados entre uno y otro, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos y físicos en los planes de estudios vigentes, así como en los textos que son utilizados en los programas. Una manera de vincular estos contenidos es por medio de la predicción como un eje integrador desde la aproximación socioepistemológica entendida como práctica social.

En los textos de física e ingeniería utilizadas en nuestro medio encontramos argumentos como el siguiente: “Si  $s$  representa a un parámetro físico en un instante dado de tiempo  $t$ , un momento después  $t + \Delta t$ , este parámetro será  $s + \Delta s$  ...”, que requiere para su conceptualización el pensar un tanto como la serie de Taylor en cuanto instrumento de predicción para resolver problemas propios de la física, esta forma de pensar son de una naturaleza dinámica donde las ideas de cambio y variación están presentes.

En esta investigación se hace un análisis epistemológico de los procesos de matemátización de la energía potencial por medio de la predicción como práctica social y buscar las posibles relaciones o indicios de ellas de la estabilidad del equilibrio en un sistema mecánico y sus configuraciones,

1207

con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático, los fenómenos físicos y la práctica social de predecir como eje central en tanto unidad de análisis.

### Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los contenidos matemáticos y físicos están desvinculados y sin enfatizar los aspectos históricos, filosóficos y epistemológicos.

En los programas y textos de cálculo el binomio de Newton es expresado con la estructura  $(a + b)^n$  y utilizado en forma algorítmica sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de la física el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación cuando es desarrollado como una serie de potencias fraccionarias o negativas de algún fenómeno físico, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas son transposiciones de dos saberes matemáticos que están desvinculados entre uno y otro, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo:  $s(x)$  y  $s(x + \Delta x)$  para funciones de una variable independiente, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? ¿Cuáles son los elementos de relación entre el cálculo y los fenómenos físicos?

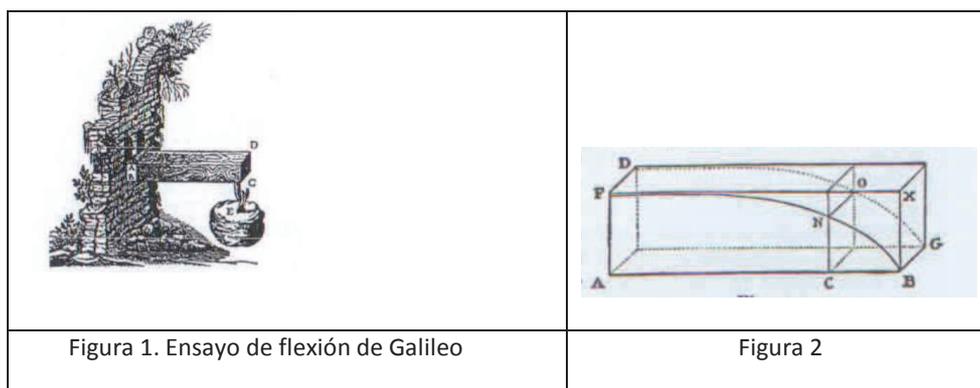
El objetivo de esta investigación es: Robustecer la epistemología inicial de la matematización de fenómenos físicos asociado a la transición del binomio de Newton a la serie de Taylor a través de la predicción e interpolación en el sentido de construir una epistemología actualizada que incluya los argumentos de los estudiantes con la finalidad de reconstruir la matemática escolar mas integral en el contexto de la Ingeniería Civil, en particular la estabilidad de un cuerpo a través del estudio de su energía potencial.

### **Antecedentes**

En los últimos siglos se ha tenido un registro de los logros de la especie humana en la construcción de estructuras, máquinas, monumentos, que han durado muchos años, durante esos milenios la humanidad ha construido también otras estructuras tales como catapultas, barcos, puentes que funcionaron con éxito durante un período de. Antes de la mitad del siglo XVII, las estructuras se construyeron principalmente con base a la experiencia. En cada generación, los “ingenieros” tuvieron que pasar por largos aprendizajes de manos de técnicos con más experiencias para dominar el oficio de ingeniero, lo que implicaba, tal vez, tanto fracaso como éxitos. No existe una evidencia clara de que esos ingenieros de antaño hubiesen desarrollado o tenido capacidad para sustentar sus experimentos con cualquier tipo de cálculo (Bickford, 1997)

Un acercamiento científico a la mecánica de sólidos o resistencia de materiales como es llama a menudo, inició con Leonardo da Vinci (1452-1519). El fue el primero en aplicar los principios de la estática para determinar las fuerzas internas en elementos estructurales, y el primero en efectuar experimentos sobre la resistencia de los materiales ingenieriles. En experimentos con alambre de hierro y con vigas y como resultados de sus ensayos en vigas concluyó que la resistencia de una viga apoyada en ambos extremos varía inversamente con la longitud y directamente con el ancho (Timoshenko, 1983; Bickford, 1997).

Galileo (1564-1642) realizó los primeros intentos de aplicar lógicamente el análisis de esfuerzos. Los resultados publicados están en *Dos nuevas Ciencias* en 1638, representa el principio de la ciencia de la resistencia de materiales, los experimentos consistieron en la tensión y concluyó que la resistencia de materiales de una barra es proporcional al área de su sección transversal e independiente de su longitud, así como experimentos de flexión en la cual concluyó de manera incorrecta que los esfuerzos necesarios para contrarrestar la flexión se distribuye de modo uniforme sobre la sección transversal de la pieza como se muestra en la figura 1, (Timoshenko, 1983; Bickford, 1997).



Galileo (1991) escribe que la resistencia en cualquier sección transversal CN será incluido entre la base AD , el plano rectangular AG, la línea BG y la superficie DGBF, donde la curvatura es idéntica con la parábola FNB. Este sólido tendrá la misma resistencia en todo punto, entonces el momento de fuerza varia en la misma proporción al momento flexionante debe tomar la curva o parábola FNB, como se muestra en la Figura 2. Esto satisface la ecuación de resistencia  $\frac{(AF)^2}{(CN)} = \frac{BA}{BC}$

### Marco teórico

En esta investigación, nuestro marco teórico está matizado en la aproximación socioepistemológica en donde se analizan de manera sistémica la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social. Cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellas al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía (2004) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción del objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, mostramos el papel de la interpolación y la predicción en el cálculo con énfasis en el fenómeno de estabilidad en sistema

discreto de una partícula sobre una superficie lisa para determinar la energía potencial, considerando a la predicción como práctica social, y a la interpolación como herramienta para la transición del binomio de Newton a la serie de Taylor para el análisis de la energía potencial en el sistema de equilibrio y los conceptos de máximo y mínimo dentro del marco de la aproximación socioepistemológica, con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

### Interpolación y predicción explícita

En el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación y predicción, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Hernández, 2002). En la investigación de Cantoral (2001) considera la noción de predicción como una práctica social para conocer el movimiento de un flujo de agua a partir de un estado inicial, es decir, que  $P$  es un estado inicial y se quiere predecir el estado ulterior  $P + PQ$ , donde  $PQ$  es la variación de un estado a otro, con esta idea y la interpolación Newton descubre su teorema del binomio, el cual es dado como  $(P + PQ)^{m/n}$  y utiliza la noción de interpolación, así como las diferencias finitas para construir la serie de Taylor.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y usando las diferencias finitas se llegó a;  
 $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \dots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$ . En esencia Taylor consideró el límite  $\Delta x \rightarrow 0$ , cuando,  $n \rightarrow \infty$  y  $x$  es fija, para construir

$$y = y_0 + (x - x_0) \dot{y}_0 / x_0 + (x - x_0)^2 \ddot{y}_0 / 2(x)^2 + (x - x_0)^3 \ddot{y}_0 / 6(x)^2 + \dots$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

### Estabilidad de sistemas discretos

En el presente contexto, la estabilidad del equilibrio se refiere cuando un sistema elástico en equilibrio es separado ligeramente de esa configuración de equilibrios: ¿Permanece el sistema elástico en una nueva configuración? ¿Regresa a la configuración original de equilibrio? ¿Cambia a otra configuración de equilibrio cercana o lejana?

En la figura 3. Muestra la estabilidad de una partícula, (a) estabilidad neutra, (b) estabilidad estable y (c) inestabilidad

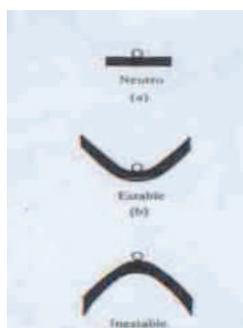


Figura 3. Estabilidad del equilibrio de una partícula que se mueve sobre una superficie lisa

Las configuraciones de equilibrio de un sistema mecánico conservativo se pueden determinar resolviendo las ecuaciones

$$\frac{dV}{dx_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ son los grados de libertad}$$

Para un sistema con un grado de libertad, la estabilidad de una configuración particular de equilibrio se determina con base en la segunda derivada de la energía potencial evaluada en la configuración de equilibrio.

Esta conclusión se obtiene con base en el desarrollo de la energía potencial en la proximidad de una configuración de equilibrio. Si  $x$  es el único grado de libertad en una configuración de equilibrio, la energía potencial total de un sistema mecánico conservativo se puede expresar como:

$$V_n = (1 + \Delta)^n V_0 = V_0 + n\Delta V_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 V_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 V_0 + \text{etc.}$$

$$x_n - x_0 = n\Delta x, x = \frac{x_n - x_0}{\Delta x}$$

$$V_n = V_0 + \frac{x_n - x_0}{\Delta x} \Delta V_0 + \frac{\frac{x_n - x_0}{\Delta x} (\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 1)}{2!} \Delta^2 V_0 + \frac{\frac{x_n - x_0}{\Delta x} (\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 1) (\frac{x_n - x_0}{\Delta x} - 2)}{3!} \Delta^3 V_0 + \text{etc.}$$

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \frac{dV(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} + \dots$$

$$\Delta V = V(x) - V(x_0) = (x - x_0) \frac{dV(x_0)}{dx} + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \dots$$

En una configuración de equilibrio  $x = x_0$ , la primera derivada  $V'(x)$  es igual a cero, por lo que para pequeños cambios la posición  $x - x_0$ , el signo del cambio en la energía potencial depende de

$$\Delta V = \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2V(x_0)}{dx^2} \Big|_{x=x_0} + \dots$$

Para  $\Delta V$  sea positiva, lo cual significa que para cualquier pequeño cambio de posición desde la posición de equilibrio  $x = x_0$  el cambio en la energía potencial es positivo, la segunda derivada debe ser positiva. Este cambio se indica en la figura 2.

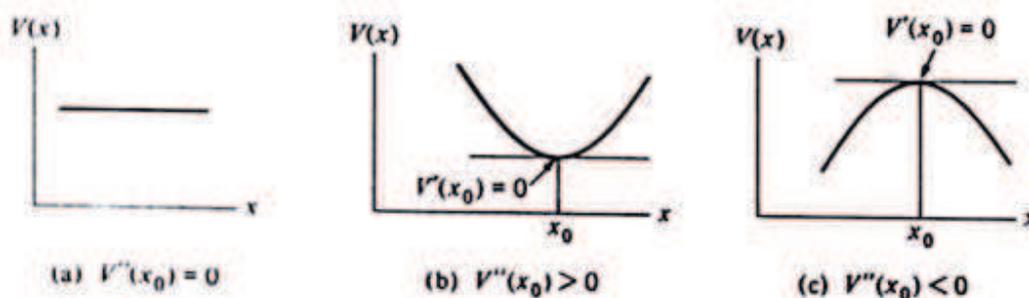


Figura 2. Criterio energético para la estabilidad del equilibrio

En la figura 1c, la segunda derivada es negativa en la posición de equilibrio, entonces la posición de equilibrio es inestable ya que el signo de  $\Delta V$  es negativo para cualquier cambio de posición. Si la segunda derivada es igual a cero en la configuración de equilibrio, no se puede tomar una decisión sin recurrir a la derivada de orden superior. Este caso, mostrado en la figura 1a, se llama comúnmente caso crítico de equilibrio neutro (Bickford, 1997).

Cuando la segunda derivada se anula en  $x = x_0$ , es necesario evaluar las derivadas superiores para calcular la estabilidad. Con  $V'(x_0) = V''(x_0) = 0$ , escribimos

$$\Delta V = \frac{(x-x_0)^3}{6} \frac{d^3V(x_0)}{dx^3} + \frac{(x-x_0)^4}{24} \frac{d^4V(x_0)}{dx^4} + \dots$$

Para el cambio pequeño  $x-x_0$ , el signo de  $\Delta V$  está establecido por el término  $(x-x_0)^3 V'''(x_0)/6$ . Si  $V'''(x_0) \neq 0$ , el signo de  $(x-x_0)^3 V'''(x_0)/6$  será negativo para  $x > x_0$  o para  $x < x_0$ ; esto es,  $\Delta V$  será menor que cero para cualquier desplazamiento desde la configuración de equilibrio. Por tanto, si  $V''(x_0) = 0$  y  $V'''(x_0) \neq 0$ , la configuración de equilibrio será inestable. Esto corresponde a lo que se llama punto de inflexión de la función energía potencial.

Si tanto  $V''(x_0) = 0$  como  $V'''(x_0) = 0$ , la cuarta derivada debe evaluarse. Si  $V^{IV}(x_0) > 0$ , la posición de equilibrio es estable y si  $V^{IV}(x_0) < 0$ , la configuración de equilibrio es inestable. Si  $V^{IV}(x_0) = 0$ , se debe considerar derivadas de orden superior.

Debería quedar claro al estudiante que este análisis es equivalente al de los máximos y mínimos de funciones de una variable, el cual se estudia en cálculo, y que en la presente clase de problemas físicos requerimos que la energía potencial sea un mínimo apropiado para tener equilibrio estable.

### Conclusión

Nuestra aportación es un análisis epistemológico del fenómeno físico de energía potencial, para estudiar la estabilidad del equilibrio de una partícula que se mueve sobre una superficie lisa como una forma de construcción del conocimiento, donde nos proporcionan elementos que relacionan el cálculo y los fenómenos físicos para un cambio epistemológico del cálculo escolar por medio de una visión Newtoniana-Tayloriana, considerando a la predicción como práctica social y eje para reorganizar el Cálculo escolar (Hernández, 2006). En particular en la modelación matemática de los problemas de ingeniería, en la cual se localiza una sólida entidad conceptual y algorítmica que da pie a nuevos acercamientos didácticos y que pueden estar inmersos en los estudiantes en una situación escolar, tal es el caso de las prácticas sociales de la predicción que favorecen la construcción del conocimiento matemático y físico.

### Referencias bibliográficas

- Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. México. Editorial CECSA, vol. I.
- Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. Cinvestav, IPN.
- Bickford, W. (1997). *Mecánica de sólidos, conceptos y aplicaciones*. Mc Graw Hill/Irwin. México
- Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cordero, F. (2003). *Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados*. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(1) (pp. 73-78). México. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.
- Edward, H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. U.S.A. Springer-Verlag.

Galileo (1991). *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Translated by Henry Crew and Alfonso de Salvio. U.S.A. Prometheus Books.

Hernández, H. (2006). *Una visión socioepistemológica de la matemátización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría no publicada. UNACH.

Timoshenko, S. (1953). *History of Strength of materials*. U.S.A. McGraw-Hill Book Company.