

## ANÁLISIS DEL RAZONAMIENTO DE ALUMNOS UNIVERSITARIOS EN SITUACIONES DE VALIDACIÓN EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Patricia Sastre Vázquez, Carolina Boubée y Ana María Graciela Rey

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Argentina

Universidad Católica Argentina

psastre@faa.unicen.edu.ar, cboubee@faa.unicen.edu.ar, grey@faa.unicen.edu.ar

**Resumen.** El presente trabajo relata una etapa del proyecto de investigación “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”. Su objetivo es el análisis de los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes del Primer Año de todas las carreras de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, en situaciones de validación referidas a Secciones Cónicas.

Los resultados arrojan un predominio de proceder más intelectuales que pragmáticos, una significativa cantidad de casos con ausencia de validación y otros en los que se evidencia la interpretación simbólica de un objeto algebraico.

**Palabras clave:** razonamiento, validación, cónicas

**Abstract.** This paper describes a stage of the research project "Analysis of the Mathematical Language and its influence on the processes of Validation Engineering college students." Its aim is to analyze the types of reasoning used by students of the First Year of races of the Faculty of Agronomy of the Universidad Nacional del Centro, validation situations regarding Conic Sections.

The results show a predominance of intellectual procedures more pragmatic, a significant number of cases with no validation and other evidence on which the symbolic interpretation of an object algebra.

**Key words:** reasoning, validation, conical

### Introducción

La actividad matemática escolar se ha compuesto, tradicionalmente, por propuestas de actividades en las que los estudiantes aplican los conocimientos ya adquiridos. Estas propuestas corresponden a lo que Balacheff (2000) denomina como “esfera de práctica” y remiten a acciones que no generan nuevos conocimientos porque no implican la necesidad de tomar decisiones ni validarlas. Sin embargo es posible diseñar otro tipo de actividades que inviten al estudiante a comprometerse activamente en la construcción de su aprendizaje y den lugar al desarrollo del razonamiento, entendido como la capacidad de establecer relaciones entre conceptos o información conocida, argumentar con razones fundadas y comunicar en forma convincente los resultados de indagaciones (Samper de Caicedo, Camargo y Leguizamón de Bernal, 2003).

El presente trabajo relata una etapa de un proyecto de investigación en desarrollo, en el área de Educación Matemática. En el marco del proyecto “Análisis del Lenguaje Matemático y su influencia en los procesos de Validación en estudiantes universitarios de Ingeniería”, se persigue como objetivo el análisis de los tipos de razonamiento utilizados por estudiantes del Primer Año de todas las carreras de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, en situaciones de validación referidas a Secciones Cónicas. Estas situaciones implican la argumentación

y fundamentación de las afirmaciones a las cuales arriban los alumnos, lo cual constituye un paso importante hacia la demostración en Matemática.

### Referencial teórico

Balacheff (2000) denomina “situaciones de validación” a aquellas actividades en las cuales los alumnos deben socializar sus explicaciones acerca de una afirmación, y las considera un paso importante en el camino hacia la demostración en Matemática. Este tipo de situaciones exigen procesos de pruebas, que no son equivalentes a los requeridos en las demostraciones formales, pero implican la toma de decisión y la construcción de una prueba explícita por parte de los estudiantes, favoreciendo el razonamiento y la búsqueda de justificaciones.

Estas actividades que invitan a la construcción de conjeturas, a la toma de decisiones y a la búsqueda de justificaciones, son consideradas por algunos autores (Samper de Caicedo, *et al*, 2003) como “actividades de investigación”.

La forma como el individuo procede para investigar, convencerse o convencer a otros acerca de una conjetura, está relacionada con la concepción que tenga acerca de la naturaleza del hacer matemático, con el conocimiento matemático que posea, siendo de suma importancia, también, el lenguaje del que disponga para trabajar (natural y simbólico) y el tipo de justificaciones que se le hayan solicitado al estudiante en su formación matemática escolar.

Balacheff (2000) distingue dos tipos de proceder al investigar: en forma pragmática o intelectual. En el primer caso, los estudiantes recurren a la acción sobre ostensivos, para establecer o justificar conjeturas. Se fundamentan en observaciones y construyen razones personales o grupales para tener confianza en ellas. Este proceso tiene un carácter singular, pues los estudiantes se centran en casos particulares, y generalmente utilizan lenguaje natural para comunicar sus producciones. Se intenta mostrar la eficacia o utilidad de una conjetura. En síntesis, son pruebas ligadas a la acción y a la experiencia. En el segundo caso, los estudiantes se apoyan en propiedades y relaciones de los objetos matemáticos involucrados. El proceso se fundamenta en la toma de conciencia del carácter genérico de las situaciones consideradas, convirtiendo el conocimiento en objeto de reflexión y discusión, privilegiando la utilización del lenguaje formal en la comunicación. Se busca aplicar el rigor propio de una teoría, ir más allá de la acción.

Es necesario reconocer el salto epistemológico entre los procedimientos pragmáticos y los intelectuales. Aceptar y valorar un ambiente que dé lugar a procedimientos prácticos, permite obtener conocimientos, lenguaje e instrumentos de argumentación para la aceptación del nuevo estatus de validación en el ambiente teórico. El nivel de desarrollo de las herramientas de investigación da lugar a distintos tipos de razonamiento.

De acuerdo con Balacheff (2000), se considera al *razonamiento* como una actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Esta misma actividad, cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración), será designada como *proceso de validación*.

El mismo autor distingue diferencias que lo llevan a hacer una clasificación más fina del razonamiento utilizado, pasando gradualmente de una racionalidad empírica a una construcción netamente cognitiva. Clasifica el razonamiento utilizando las siguientes categorías:

- ❖ *Empirismo ingenuo*: se produce y asegura una conjetura después de haberla estudiado, empíricamente, en algunos casos.
- ❖ *Experiencia crucial*: se asegura la conjetura verificándola, pragmáticamente, en un caso especial, con características extremas como respuesta a la necesidad de generalizar.
- ❖ *Ejemplo genérico*: la validez de la conjetura surge del estudio de un caso representativo de la clase correspondiente. El ejemplo genérico puede utilizarse para proceder en forma pragmática o intelectual, marcando la transición entre estos tipos de procedimientos.
- ❖ *Experiencia mental*: se afirma la validez de la conjetura interiorizando la acción y separándola de las ejecutorias sobre representantes particulares. Es decir, las operaciones y relaciones con que realiza la prueba no se derivan de la experiencia práctica sobre un objeto sino del conocimiento de definiciones, postulados y teoremas; se sustituye la observación por la razón para fundamentar el conocimiento.

### Diseño metodológico

Se diseñó una actividad con la finalidad de que los alumnos pudieran enfrentarse a la tarea de validar matemáticamente, en el área de la Geometría Analítica, específicamente abordando el tema “Secciones Cónicas”, bajo el título “Actividades matemáticas para pensar de a dos”.

El grupo de alumnos con los cuales se realizó el estudio estuvo compuesto por 46 estudiantes de la Facultad de Agronomía de la Universidad Nacional del Centro, sita en Azul, Provincia de Buenos Aires. Todos ellos son alumnos regulares de Matemática, asignatura que corresponde al primer cuatrimestre del Primer Año de las carreras de Ingeniería Agronómica, Licenciatura en Tecnología de los Alimentos y Profesorado en Ciencias Biológicas.

La actividad, que se presentó en forma escrita, incluyó una cuestión con dos preguntas y se solicitó, de manera explícita y enfática que los estudiantes, en parejas (23 grupos), dejaran en la

hoja de resolución todo lo que hicieran, además de explicar y justificar la respuesta o las razones que impidieron la resolución.

La cuestión planteada fue la siguiente:

- ¿En qué caso/s particular/es la elipse puede transformarse en otra cónica?
  - ¿Qué sucede con los elementos de ambas cónicas?

Se propuso una actividad considerada lo suficientemente amplia como para permitir la posibilidad de ser abordada de diversas maneras, como por ejemplo, mediante el análisis de los ángulos formados por los planos y el cono de revolución, análisis en el marco del registro gráfico, del registro analítico, estudio de excentricidades, etc.

En cuanto a la oportunidad para realizar esta actividad, se decidió que fuera inmediatamente después del desarrollo de la Unidad programática correspondiente a “Cónicas” a través de clases teórico-prácticas, y previa a la evaluación correspondiente.

### Resultados

Para el análisis de los resultados se utilizaron las categorías ya mencionadas en el Marco Teórico, definidas por Balacheff (2000), y que denotaremos: EI, EC, EG y EM. Así mismo, debimos tomar en cuenta una nueva categoría emergente: la categoría que denominamos Interpretación simbólica de un objeto algebraico (ISOA).

Siguiendo a Peirce (1987) se interpreta que un ícono hace referencia a una simple asociación racional entre el signo y la cosa significada, mientras que un símbolo implica una asociación mental con una significación propia del interpretante entre el signo y el objeto. Así, en términos de este autor, una fórmula algebraica es un ícono ya que una gran propiedad distintiva de los íconos es que mediante su observación se pueden descubrir otras verdades concernientes al objeto. No obstante este predominio del carácter icónico, las expresiones algebraicas contienen símbolos en el sentido de Peirce, como por ejemplo los signos  $+$ ,  $-$ ,  $=$ , etc.

La nueva categoría surge de la necesidad de encuadrar aquellas producciones de los estudiantes en las que se observa la pérdida del carácter icónico de la expresión algebraica de una cónica, reduciendo toda la expresión a símbolo, debido al peso que le otorgan al símbolo  $+$  o  $-$  de las ecuaciones de la elipse y de la hipérbola, respectivamente.

Vale aclarar que las categorías de razonamiento tomadas de los trabajos de Balacheff, fueron definidas en el contexto de la Geometría Euclidiana. Esto pone en evidencia y justifica la necesidad de incluir esta nueva categoría emergente, propia del planteo de actividades que involucran aspectos algebraicos, característicos de la Geometría Analítica.

Se consideran respuestas SC, “sin categorizar”, aquellas en las cuales existe conjetura pero no existe validación o presentan una validación inconsistente.

La Tabla 1 muestra los resultados obtenidos en la categorización de las respuestas producidas por los grupos de estudiantes.

Tabla 1. Cantidad de grupos de estudiantes para cada categoría

Categorías de Respuestas		Cantidad de Grupos
Sin categorizar	Sin Categorizar (SC)	4
	Empirismo Ingenuo (EI)	1
Categorías según Balacheff	Experiencia Crucial (EC)	0
	Ejemplo Genérico (EG)	4
	Experiencia Mental (EM)	6
Categoría emergente	Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico (ISOA)	8
TOTAL		23

Más allá de la corrección de las respuestas, como el objetivo perseguido es el análisis del tipo de razonamiento empleado por los alumnos al validar, las producciones categorizadas son aquellas que evidenciaban algún tipo de razonamiento, logrando validar alguna conjetura. Claramente, las respuestas sin categorizar son aquellas que no mostraron ningún tipo de validación, y encontramos 4 grupos con estas características.

La categorización de las producciones de los alumnos responde a la mayor categoría de razonamiento identificada. Es decir, quizás dan muestra de comenzar con un tipo de razonamiento más empírico, pero logran arribar a razonamientos más intelectuales, entonces se los incluyó en las categorías de este último tipo.

Con las Figuras 1, 2 y 3 ejemplificamos la categoría emergente ISOA mostrando algunos casos representativos de la Interpretación Simbólica de un Objeto Algebraico.

①

- Comenzamos por buscar las similitudes entre los cónicos.
- Pensamos en comparar las ecuaciones generales de los cónicos.
 

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$	circunferencia
$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	parábola
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	elipse (A y C @ mismo)
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	hipérbola (A y C @ signo)
- La elipse puede transformarse en:
  - circunferencia: cuando los valores de  $x^2$  y de  $y^2$  dejan de estar acompañados por un número. Esto se ve reflejado en la comparación de las ecuaciones generales.
  - hipérbola: cuando  $x^2$  e  $y^2$  tienen distinto signo.
- Comparamos las ecuaciones ordinarias de dos cónicos
 

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	o	$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1$	elipse
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	o	$\frac{(x-d)^2}{a^2} - \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1$	hipérbola
- Con la alteración de un signo en cualquier término, es decir en  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  en la ecuación de la elipse centrada o en  $\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2}$  en la ecuación de la elipse desplazada, obtenemos la ecuación de la hipérbola.

Figura 1. Respuesta del Grupo 8 categorizada ISOA, en la que además del cambio de signo, hay un cambio en los coeficientes

① - La elipse se transforma en otra cónica (hipérbola), cuando en la ecuación de la forma ordinaria, cuando la suma de los 2 miembros pasa a ser una resta, la diferencia entre los elementos. En la elipse, esta conformada por cuatro vértices, y cuando pasa a hacer hipérbola contiene dos vértices.

- En la elipse para calcular la semidistancia focal es  $b^2 = c^2 - a^2$  y en la hipérbola es  $c^2 = a^2 + b^2$
- Para poder trazar la hipérbola se necesita de otros elementos, llamadas asíntotas.

$\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1$	ecuación de la elipse (con centro $d, p$ )
$\frac{(x-d)^2}{a^2} - \frac{(y-p)^2}{b^2} = 1$	ecuación de la hipérbola (con centro $d, p$ )

Figura 2. Respuesta del Grupo 13 categorizada ISOA

1) Primero no se nos ocurre nada y luego observamos las formulas generales de las cónicas y vemos que en la elipse  $A$  y  $C$  tienen que tener = signo, en cambio, en la circunferencia esto no varía. También notamos que en la hipérbola  $A$  y  $C$  tienen distinto signo. Observamos los demás cónicas y no hubo coincidencias.

Concluimos que se a la formula ordenada de la elipse le cambiamos el signo + (mas) por un signo - (menos), ésta se transformaría en una hipérbola.

Y se en la formula ordenada de la elipse  $a$  y  $b$  fueran 1 (uno), se convertiría en una circunferencia.

Creemos que la elipse solamente se puede transformar en una hipérbola y no en una circunferencia.

Figura 3. Respuesta del Grupo 14 categorizada ISOA

### Análisis de resultados y conclusiones

La caracterización de los tipos de razonamiento puestos en juego en los procesos de validación que llevan a cabo los estudiantes involucrados en este estudio, para la actividad propuesta, arroja un predominio de procedimientos más “conceptuales” o “intelectuales” en relación a los considerados más “pragmáticos”, si solo se consideran las categorías de razonamiento propuestas por Balacheff (2000). Los relativamente altos valores de EM en los casos analizados así lo confirman.

Sin embargo, los indicadores de ausencia de validación y los numerosos casos de interpretaciones simbólicas de las expresiones algebraicas de las cónicas (categoría ISOA), por las que un cambio de signo valida la transformación de una cónica en otra, dan cuenta de una significativa heterogeneidad a nivel grupal. Además de esta heterogeneidad, la alta frecuencia de razonamientos categorizados como ISOA, evidencia un desconocimiento del status algebraico de los símbolos operacionales en las expresiones algebraicas, y refleja el obstáculo que representa para los alumnos la articulación entre los registros algebraico y gráfico, esencial en el aprendizaje de la Geometría Analítica, particularmente.

Consideramos necesario continuar con la indagación que permita comprender cuál es y cómo funciona la racionalidad de los estudiantes, por lo que otras propuestas de actividades y temas resultan imprescindibles para un análisis más profundo y acabado del razonamiento de los alumnos universitarios en contextos de validación.

### Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

Peirce, C. S. (1987). *Obra lógico-semiótica* (Edición de Armando Sercovich). Madrid: Taurus.

Samper de Caicedo, C., Camargo, L. y Leguizamón de Bernal, C. (2003). *Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría*. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa-Grupo Editorial Gaia.