¿QUE MODELOS EPISTEMOLOGICOS SUBYACEN EN LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA UNIVERSITARIA?

Nora Ferreyra, Marcelo Lorenzo, Mei Lee, Fabio Prieto, Daniela Scarímbolo y Carlos Parodi
Universidad Nacional de La Pampa Argentina
noraf@exactas.unlpam.edu.ar, mlorenzo@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. En el marco de un proyecto de investigación analizamos las dificultades del estudio del álgebra en el nivel universitario tomando como marco teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Creemos que uno de los factores que intervienen en el fracaso podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un Modelo Epistemológico Dominante (MED), que condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

En este trabajo mostramos la experiencia realizada con el fin de indagar acerca del nivel de algebrización alcanzado por alumnos de segundo año del Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam). El resultado de dicha experiencia indica que los estudiantes de la cohorte estudiada no han alcanzado una modelización funcional incluida en el tercer nivel de algebrización

Palabras clave: álgebra, cálculo aritmético, proceso de algebrización

Abstract. As part of a research project analyzed the difficulties of the study of algebra at the college level as a theoretical framework taking the Anthropological Theory of Didactics. We believe that one of the factors involved in the failure could be the existence, within the institutions, of Dominant Epistemological Model (DEM), which determines the teaching task and causes some disruption and lack of understanding in students.

In this paper, we show the experience made in order to inquire about the algebraisation level of students of Teacher of Mathematics career in the National University of La Pampa (NULPam). The result of this experience indicates that students in the cohort studied have not reached a functional modeling included in the third level of algebraisation

Key words: algebra, arithmetical calculation, algebraisation process

Introducción

En diversos estudios se han reconocido las dificultades y el alto grado de fracaso de los estudiantes de primer año de las carreras universitarias al enfrentar el estudio del Algebra. (Scarímbolo & Ferreyra, 2008; Parodi et al., 2009)

En el marco de un proyecto de investigación hemos abordado esta problemática desde el marco teórico provisto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y creemos que uno de los factores de este fracaso podría ser la existencia, dentro de las instituciones, de un modelo epistemológico dominante (MED), que mediatiza y condiciona la tarea docente y provoca cierta desarticulación e incomprensión en los estudiantes.

Investigaciones previas, publicadas por Bosch (2000), Gascón (1994) y Bolea (2003) entre otros, han establecido el carácter prealgebraico de la matemática presente en la enseñanza obligatoria, en la cual el MED resulta ser el de una aritmética generalizada.

La ausencia del álgebra como instrumento modelizador dificulta el planteo y la discusión de expresiones desde la perspectiva funcional y con ello la emergencia de problemas vinculados a nuevos conocimientos matemáticos.

En el trabajo presentado en el III Congreso de la TAD, Ruiz, Bosch y Gascón (2011) advierten sobre las consecuencias de la aritmetización escolar del álgebra. Al respecto señalan:

> "[...] el carácter prealgebraico de las matemáticas que se estudian en la enseñanza obligatoria constituye uno de los factores esenciales de las discontinuidades observadas en el sistema educativo [...]
>
> …la ausencia del uso del instrumento algebraico dificulta enormemente el desarrollo de la modelización algebraico-funcional lo que obstaculiza la emergencia de las cuestiones problemáticas que podrían dar sentido al cálculo diferencial." (Ruiz, Bosch y Gascón, 2011. p.745)

Como docentes del Profesorado en Matemática de la UNLPam, preocupados por la enseñanza del álgebra, tratamos de indagar acerca del MED en nuestra institución con el fin de hacerlo visible como problema y debatir sobre la necesidad de contar con un nuevo paradigma que aporte a superar las dificultades en la enseñanza y el aprendizaje.

Marco teórico

Dentro de la investigación en didáctica de la matemática, el Programa Epistemológico se caracteriza por integrar "lo pedagógico" y "lo matemático" y analizar las actividades matemáticas que se desarrollan en las distintas instituciones de enseñanza como medio para estudiar e interpretar el funcionamiento del sistema didáctico. Este programa, según Gascón (2002), aborda el problema de la Educación Matemática desde el análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes).

En el ámbito del enfoque epistemológico en didáctica de la matemática podemos considerar diferentes teorías, una de ellas es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Dicha teoría postula que en las instituciones nunca pueden estudiarse problemas aislados, y centra la atención en las soluciones obtenidas y su aplicación a otros problemas, cada vez más complejos que originarán nuevas organizaciones matemáticas. En esta Teoría el modelo de la actividad matemática institucional, está centrado en la noción de "Organización Matemática". Dicha organización matemática comprende un saber matemático modelizado por medio de organizaciones didácticas para su enseñanza. Toda Organización Matemática está compuesta por cuatro clases de elementos fundamentales:

- Cierto número de tareas o problemas matemáticos considerados en una institución dada.
- Un conjunto de técnicas que permiten realizar las tareas, es decir una manera sistemática de resolver las cuestiones propuestas.
- Una tecnología que describe las técnicas utilizadas y justifica su pertinencia para resolver las tareas en las que se aplica. Dicha tecnología integra los conceptos, permite relacionar distintas técnicas y producir otras nuevas.
- Un segundo nivel justificador, la teoría, que permite fundamentar las descripciones y justificaciones tecnológicas. La teoría justifica las tecnologías, tal como éstas justifican las técnicas.

Este sistema formado por los cuatro elementos conforma una organización matemática que consideramos la unidad mínima de análisis de la actividad matemática.

El caso particular del álgebra escolar ha sido motivo de investigaciones desde el enfoque de la TAD, algunas de ellas han abordado, cuestiones referidas al proceso de algebrización de organizaciones matemáticas en la Escuela Secundaria. Particularmente, se ha caracterizado el modelo dominante en dicha institución escolar como una "aritmética generalizada" que se distingue de su interpretación como instrumento de modelización (Bolea, 2003). Desde este punto de vista, al dejar de pensar en el álgebra como una prolongación de las prácticas aritméticas, es posible investigar la emergencia de un modelo más general.

En el marco de nuestra investigación, consideramos necesario poner a prueba el nivel de algebrización básico que deberían haber alcanzado los estudiantes. Para ello, adoptamos como modelo epistemológico de referencia (MER), el propuesto en el trabajo de Ruiz, Bosch y Gascón (2011), mencionado anteriormente, en el cual se amplía el modelo epistemológico del álgebra para articularlo con la modelización algebraica con parámetros.

Se asume entonces, el álgebra, como instrumento de modelización y se espera que un estudiante sobre todo en el profesorado, alcance lo que dicho trabajo denomina un *tercer nivel de algebrización.* Este nivel se caracteriza por una Organización Matemática (OM) con una fuerte generalización de las ecuaciones, en las cuales no se limita el número de variables y no hay distinción entre parámetros e incógnitas. Es en este nivel donde se considera que culmina el proceso de algebrización elemental.

Siguiendo el trabajo de Ruiz, consideramos como "problema aritmético" a aquel que puede resolverse mediante una simple cadena de operaciones a partir de los datos del problema. Las técnicas más usuales en la resolución de este tipo de problemas se manifiestan en discursos verbales, que también pueden escribirse como una cadena estructurada y consiste en lo que se denomina *Programa de Cálculo Aritmético* (PCA).

Para alcanzar el tercer nivel mencionado anteriormente, se plantean tres etapas en el proceso de algebrización que describiremos brevemente.

La primera etapa se caracteriza por la necesidad de considerar un PCA como un todo, pasar de una formulación retórica a una escrita y manipularlo globalmente. Surgen nuevas técnicas, sobre todo de simplificación, para resolver los nuevos problemas.

La segunda etapa se identifica con la necesidad de igualar dos PCA que tengan los mismos argumentos numéricos. Aparecen nuevas técnicas como las de cancelación, que tienen como objetivo obtener ecuaciones equivalentes y no sólo PCA equivalentes como pasaba en la primera etapa.

Finalmente, la tercera etapa se identifica con el momento de generalizar fuertemente el cálculo ecuacional puesto que se hace necesario no limitar el número de variables y no hacer ninguna distinción entre incógnitas y parámetros. El tipo de situaciones que provoca tal ampliación se relaciona con la variación simultánea de dos o más variables y cómo impacta en la variación del PCA.

Experiencia

Con el fin de caracterizar el nivel de algebrización alcanzado por estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática y describir su desempeño en distintas etapas del proceso, tomamos como población de estudio a los 17 alumnos de la asignatura Taller I. Estos estudiantes han regularizado las materias iniciales de la carrera como Álgebra I y Álgebra Lineal, por lo cual asumimos que disponen del instrumento algebraico, con sus prácticas aritméticas y los elementos tecnológico-teóricos que les permiten justificar e interpretar tales prácticas.

En el desarrollo de la experiencia se presentaron, con algunas variantes, los problemas propuestos por Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón (2012), identificados como el *sistema de triángulos isósceles inscritos en una circunferencia*. La resolución de los mismos involucra desde un PCA hasta una completa algebrización de la fórmula, lo cual posibilita, entre otros tratamientos, estudiar la modificación de cada una de las variables en función de las demás.

El primer problema planteado es:

> Problema 1: *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia de radio 6cm. Si la altura relativa al lado desigual del triángulo mide 9cm, ¿cuánto vale el área del triángulo?*

La resolución aritmética prevista es verbal, apoyada en la Figura 1, donde se señala la operatoria aritmética siguiente: Se resta el radio de la altura para obtener uno de los catetos del triángulo *OBH*. Con este dato y el radio podemos calcular la mitad de la base y, posteriormente, aplicar la fórmula tradicional para el cálculo del área de un triángulo: $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

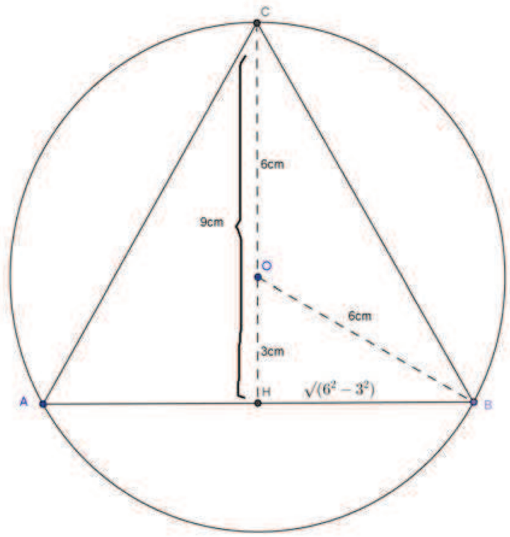

Figura 1

Efectivamente, para la resolución de este tipo de problemas no es necesario disponer de una traducción simbólica del procedimiento, alcanza con poder resolver las operaciones. Sin embargo, si comenzamos a plantear algunas cuestiones de naturaleza tecnológica, relativas a por qué se obtiene el resultado que se obtiene, qué condiciones se requieren para que tenga solución, cuál es el dominio de validez de las técnicas utilizadas, entre otras, podemos avanzar en el proceso de algebrización.

> Problema 2: *Un triángulo isósceles está inscrito en una circunferencia y la altura relativa al lado desigual del triángulo mide* $3/2$ *del radio de la circunferencia. ¿Cómo depende el área del triángulo del radio de la circunferencia circunscrita?*

Puesto que en este problema los datos no son números sino relaciones y tampoco se pide un resultado numérico sino una relación, resulta evidente que estamos ante un problema situado ya en un primer grado de algebrización.

Al analizar las respuestas obtenidas tanto del Problema 1 como del Problema 2, notamos que los estudiantes, curiosamente, en el primer problema mostraron resoluciones que corresponderían a una primera etapa de algebrización, ya que no ejecutaron simplemente un PCA sino que tradujeron a una formulación simbólica, y manipularon globalmente el problema.

Nos surge pues el siguiente interrogante: ¿Por qué apareció esa resolución algebraica, aun disponiendo de los números para sacar las cuentas en cada paso? ¿Podrá ser una cuestión de Contrato Didáctico?

Como consecuencia de lo trabajado en el primer caso, en el problema 2 respondieron: "*ya está resuelto, queda expresado*" y escribieron: $A = \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2$. Es una observación correcta, ya fue resuelto, puesto que se "adelantaron" en el problema anterior. El lenguaje algebraico aparece como simbolismo de lo aritmético y se evidencia la eficacia de la técnica operatoria provista por el teorema de Pitágoras y las propiedades del conjunto numérico.

Podemos pensar también con respecto a la resolución de estos primeros problemas, que la escuela secundaria o las asignaturas de primer año de universidad les han brindado las herramientas algebraicas necesarias como para prescindir del paso por el nivel aritmético y situarse directamente en una primera etapa de algebrización de manera general, ya que todos ensayaron la misma modelización.

De acuerdo a nuestro marco teórico, en el mismo nivel de algebrización se sitúan los problemas que requieren resolver una ecuación sencilla. Por ejemplo, en el problema 2, si se intercambian la condición de dato e incógnita entre Área y Radio, sólo cambia el procedimiento en despejar y obtener la siguiente expresión: $r = \sqrt{\frac{4 \cdot A}{3\sqrt{3}}}$.

En este problema, también fueron capaces de responder preguntas formuladas en torno al campo de validez de la técnica utilizada, puesto que analizaron la posibilidad de considerar triángulos isósceles cuya altura sea menor que el radio de la circunferencia y pudieron plantear las fórmulas correspondientes. Esta actividad pone de manifiesto la utilización de un discurso tecnológico que justifica la resolución del problema y sustenta la técnica en el contexto del mismo.

Para evaluar la segunda etapa del proceso de algebrización es preciso plantear problemas en los cuales se requiera igualar dos PCA, por lo cual propusimos a los estudiantes los problemas 3 y 4.

> Problema 3: *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios R_1 y R_2. Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en 1*

cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área, ¿qué relación hay en cada caso entre la altura del triángulo y el radio de la circunferencia circunscrita?

Puesto que en los problemas anteriores se habían trabajado estas relaciones, se suponía que los estudiantes, economizando tiempo y esfuerzo, iban a recuperar las expresiones que relacionan el Área con la altura y el radio en cada caso para luego plantear una ecuación y concluir. Esto es:

$$A_1 = h_1\sqrt{R_1^2 - (h_1 - R_1)^2}$$

$$A_2 = h_2\sqrt{R_2^2 - (h_2 - R_2)^2} = 2h_1\sqrt{(R_1 + 1)^2 - (2h_1 - (R_1 + 1))^2}$$

Puesto que las áreas son iguales, es posible realizar la igualación y determinar la relación entre el radio y la altura para cada uno de los triángulos.

$$A_1 = A_2$$

$$h_1\sqrt{R_1^2 - (h_1 - R_1)^2} = 2h_1\sqrt{(R_1 + 1)^2 - (2h_1 - (R_1 + 1))^2}$$

Curiosamente, los estudiantes no utilizaron el desarrollo efectuado en el primer triángulo para resolver el segundo, sino que realizaron todas las tareas nuevamente. ¿Será que no percibieron la similitud de operaciones a realizar en ambos triángulos?

Se identificaron dificultades parecidas en un trabajo previo realizado en torno al grado de algebrización en una tarea de álgebra lineal (Lorenzo, Ferreyra y Parodi, 2012). En ese momento se supuso que tal comportamiento estaba asociado al contrato didáctico, sin embargo, en este caso se repite sin mediar las mismas condiciones iniciales.

Otra de las cuestiones observadas en el desempeño de los estudiantes es que lograron obtener la relación entre altura y radio correspondientes al triángulo 1, pero no realizaron la transferencia para expresar la relación en términos de altura y radio del segundo triángulo. No tenemos hipótesis para la ausencia de esa resolución, ya que se observa una buena actuación en tareas más complejas como por ejemplo el análisis acerca de las condiciones para la existencia de ambos triángulos o los posibles valores que pueden tomar las variables involucradas.

Problema 4: *Dos triángulos isósceles están inscritos respectivamente en circunferencias de radios R_1 y R_2. Se sabe que la altura (relativa al lado desigual) del segundo es el doble de la correspondiente altura del primero y el radio de la segunda circunferencia excede en 1 cm al radio de la primera. Si los dos triángulos tienen la misma área y la altura del primer triángulo es de 2 cm. ¿cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita a este triángulo?*

Siguiendo la categorización de Ruiz Munzón, el problema 4 corresponde a un subconjunto particular de los problemas que identifican el segundo grado de algebrización, la mencionada autora señala como un riesgo el describir la razón de ser del álgebra escolar con la resolución de problemas de este tipo, puesto que se limita a la resolución de ecuaciones, dando un valor concreto a una de las variables.

Nuestros alumnos trabajaron de acuerdo a lo esperado en dicha etapa y pudieron distinguir que el problema 4 era sólo un caso particular del 3.

La culminación del trabajo de algebrización estaría dada en el tercer nivel, donde se requiere una fuerte generalización, sin hacer la distinción de parámetros ni incógnitas y la posibilidad de estudiar la variación de algunas variables en conjunto a partir de la variación de otras.

Para analizar la actuación de nuestros alumnos propusimos la resolución de la siguiente tarea:

> Problema 5: *¿Se puede determinar un triángulo isósceles por su área A y la longitud del lado igual c? ¿Cuánto mide el radio R de la circunferencia donde se inscribe el triángulo? ¿Cómo depende R de la variación conjunta de los lados b y c?*

Si bien casi todos los estudiantes pudieron establecer relaciones, lo hicieron en términos de una fórmula, esto es: $A = \dfrac{h \cdot 2\sqrt{c^2 - h^2}}{2}$ o bien: $h = \pm\sqrt{\dfrac{c^2 \pm \sqrt{c^2 - 4A^2}}{2}}$ pero verificaron a partir de números, es decir estableciendo claramente cuáles eran los datos y cuales las incógnitas y no respondieron cuestiones asociadas al análisis funcional.

Aun cuando la última pregunta era muy explícita, sólo dijeron que la dependencia era $R = \dfrac{c^2}{\sqrt{4c^2 - b^2}}$ o alguna otra expresión similar. Sin pensar en la manipulación de algunas variables.

Consideraciones finales

El análisis de la producción de los estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática de la UNLPam, nos permitió aproximarnos al MED de nuestra institución y establecer algunas hipótesis preliminares. Cabe señalar que hemos analizado una sola cohorte de alumnos (ingresantes 2011) por lo cual los resultados, como ya dijimos, deberán ser validados con futuras repeticiones de este tipo de actividades.

Con respecto al nivel de algebrización de los estudiantes, pensamos que el paso por los dos primeros años en la universidad les ha permitido superar el modelo del álgebra como aritmética generalizada. Si bien se trabaja con números como ejemplo o como recursos de prueba para la formulación de conjeturas, se logran establecer relaciones.

Sin embargo, parece evidente que no se logra el tercer nivel de algebrización, asociado al modelo del álgebra como instrumento de modelización algebraico-funcional puesto que están lejos de poder analizar la dependencia entre diferentes variables, ni siquiera a partir de preguntas orientadoras. Ante las indagaciones realizadas, los alumnos no lograron esa fuerte generalización del cálculo ecuacional a la que se refiere Munzón. Esto priva a los estudiantes del manejo de tareas que se requieren para estudiar funciones aisladas, esto es, para indagar acerca de las relaciones internas entre los elementos de una misma función y para analizar su comportamiento global. No lograron apropiarse de las técnicas que les permitiesen abordar las tareas planteadas y, por lo tanto, no lograron desarrollar tecnologías y/o teoría pertinente para este nivel.

En este punto, nuestra hipótesis es que el MED del álgebra en nuestra institución, tiene los elementos básicos del instrumento de modelización algebraico-funcional y que con un trabajo de profundización en ese sentido puede lograrse la culminación del desarrollo algebraico en los primeros años de la carrera.

Referencias bibliográficas

Bolea, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Monografías del seminario matemático. Prensa Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. (2000).”Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática”. IV Simposio SEIEM. Huelva, España.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona: ICE-Horsori

Gascón, J. (1994): Un nouveau modéle de l'algébre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée, *Petit x*, 37, 43-63.

Lorenzo, M.; Ferreyra, N. y Parodi, C. (2012). “Análisis del grado de algebrización en una tarea de Álgebra Lineal de la UNLPam”, *Memorias de la IV REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.

Parodi, C.; Rechimont, E.; Ferryra, N.; Castro, N. ; Scarímbolo, D. (2009). “El trabajo algebraico de los ingresantes”. Comunicación XXXII Reunión de Educación Matemática, Universidad Nacional de Mar del Plata. Resumen en http://www.mdp.edu.ar/exactas/uma2009/pdf/sesiones/Sesion4.pdf

Ruiz-Munzón, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). "Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización", *Actas III CITAD: Un Panorama de la TAD*, pp 743-765, Centre de Recerca Matemàtica, Campus de Bellaterra, Barcelona.

Scarímbolo, M., Ferreyra, N. (2008) "El modelo de la proporcionalidad en ingresantes al nivel universitario", *Memorias de la III REPEM*, pp 152 – 159, EdUNLPam.