

INGENIERÍA DIDÁCTICA REFERIDA AL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Yaneth Ríos García

Centro de Estudios Matemáticos y Físicos, Facultad de Humanidades y Educación.

Universidad del Zulia. (Venezuela)

yanrios@cantv.net

Campo de investigación: números racionales y proporcionalidad. Nivel educativo: superior

Palabras clave: representaciones, situaciones didácticas, ingeniería didáctica y fracciones

Resumen

Tomando en consideración las diversas interpretaciones que tiene el concepto de fracción, el traslado entre cada una de ellas y los diversos sistemas de representación externa que pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje, se plantea la posibilidad de aplicar una Ingeniería Didáctica para estudiar estos aspectos. Esta ponencia pretende presentar algunos resultados del análisis preliminar de una Ingeniería que está en proceso, en su dimensión cognitiva, de las preconcepciones que tienen los alumnos con respecto al concepto de fracción; la población utilizada fue variable 48 ó 189 alumnos (se especifica en el análisis de los resultados) del primer semestre de la Licenciatura en Educación, año 2004, Matemática y Física de la Facultad de Humanidades y Educación de La Universidad del Zulia.

Introducción

Uno de los conceptos para el cual los alumnos presentan diversas dificultades de comprensión, es el de fracción. Muchos autores coinciden que las dificultades de su aprendizaje se deben a las diversas interpretaciones (acepciones, representaciones, concepciones, constructos) que admite este concepto. Entre estas acepciones tenemos: la de parte todo (sub-área), razón (subconjunto), reparto (división indicada), operador, número racional y número decimal (cociente), entre otros.

Considerando la diversidad de interpretaciones que tiene el concepto de fracción, sería interesante preguntar ¿Es necesario que el alumno las domine todas?, sobre todo el alumno que está siendo formado para ser educador en el área de Matemática. Se acepta que la respuesta es afirmativa, debido a que todas las situaciones problemas que involucra el concepto de fracción no son resolubles con una sola representación. Habrá situaciones que podrán ser resueltas por algunas interpretaciones y por otras no; además el conocer y aplicar varias concepciones permitirá al alumno desarrollar procesos mentales tales como la comparación, análisis, síntesis y planteamiento de inferencias, procesos que son propios del razonamiento matemático. Por otro lado, el futuro docente debe ser conocedor, en la medida de lo posible, del saber sabio^{*****}, pues el dominar más contenido del que se va a enseñar le permite tener una visión más amplia de cómo enseñar, así como hacer conexiones entre los diversos saberes matemáticos a enseñar

En otro orden de ideas, para entender algún concepto matemático o cualquier otro, primeramente el individuo debe hacer representaciones externas del mismo; pero las que se adquieren en el sistema escolarizado, en muchas oportunidades son producto de las experiencias previas del alumno y/o son el resultado de la combinación de éstas con las experiencias vividas en aula, que no tienen una organización sistemática y mucho menos se establecen relaciones entre ellas.

Ante tal panorámica, surge la inquietud de diseñar situaciones didácticas para enseñar el concepto de fracción, desde los diversos sistemas de representación externas y que considere

***** Conocimiento científico aceptado por la comunidad científica

las diversas interpretaciones del concepto de fracción, y así mejorar lo referente al conocimiento didáctico matemático de la fracción.

En la Universidad del Zulia, ubicada en Venezuela estado Zulia, desde el año 2001 hasta los actuales momentos, se viene aplicando una Ingeniería Didáctica referida al concepto de fracción; esta metodología de investigación esta compuesta por tres etapas dentro de las cuales se considera en la primera etapa, el análisis preliminar, específicamente la dimensión cognitiva, la cual toma en cuenta el componente cognitivo de la población que va a ser sometida a la Ingeniería, especificando las concepciones que tienen los estudiantes respecto al concepto de fracción. En este sentido, el presente trabajo tiene como propósito presentar una breve diagnosis de la población sometida al estudio.

Representaciones externas o sistemas de representación e interpretaciones del concepto de fracción

En Matemática, partiendo de lo que nos refieren Pérez (1995) y Castro y Castro (1977, citados por Blázquez y Ortega, 2001), para poder razonar, recordar o comunicar las ideas matemáticas, es necesario primero hacer una representación interna o interpretación de éstas para que la mente pueda operar sobre ellas. Además para poder comunicar alguna noción matemática es necesario servirse de dibujos o símbolos que expresen los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades.

A estas expresiones, dibujos o símbolos es lo que se denomina representación externa o sistemas de representación. Éstas constituyen un aspecto fundamental en la enseñanza, pues ellas permiten la representación interna, con lo que se puede razonar; así pues, para lograr los procesos del pensamiento y aumentar la capacidad cognitiva es adecuado que se logre una variedad de representaciones externas del mismo concepto. Eso lo sugiere Romero (2000, citado por Blázquez y Ortega, 2001), pues las representaciones se complementan y muestran diversos aspectos de un mismo concepto con mayor o menor claridad, porque todos son limitados y necesitan de los otros.

Cuando la representación externa de un concepto se realiza siempre de la misma manera, provoca errores en el aprendizaje. En lo que respecta a esta investigación, las fracciones, en nuestro sistema educativo la representación externa que por predilección se trabaja es la formal aritmética y simbólica.

Por otro lado, otra variable que se consideró en el diseño de situaciones didácticas para los docentes en formación fueron las diversas interpretaciones que tiene el concepto de fracción, tales como reparto, operador, división indicada, razón, número decimal y porcentajes, entre otras, que al ser desconocidos por los estudiantes no les permite resolver problemas donde se necesite el conocimiento de estas interpretaciones. Así mismo, como lo asegura Segovia y Rico (1999) se deben además establecer conexiones entre las diferentes interpretaciones, porque como lo afirma Azcarate (1995), estos procesos no son espontáneos en los estudiantes, muy por el contrario, son procesos elementales que los profesores deben ayudar que sus alumnos adquieran. En nuestro sistema educativo las interpretaciones que prevalecen son las de parte todo y el número decimal; la primera interpretación permite dotar a la fracción de un significado gráfico en unidades continuas y la segunda, permite entenderlas como divisiones, es decir dota a las fracciones de significado procedimental.

Según Duval (1993, citado por Blázquez y Ortega, 2001) las representaciones internas, es decir las interpretaciones, se desarrollan al interiorizar las representaciones externas y esto lo refirman Castro y Castro (1997, Blázquez y Ortega, 2001) cuando aseguran que dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y sus respectivos

significados, operar con las reglas internas de cada representación externa y detectar cual es la representación más ventajosa para trabajar determinadas propiedades.

Son diversas las clasificaciones que se han realizado de las representaciones externas, para efectos de esta investigación utilizaremos la de Maza (1995), el cual considera: el lenguaje informal, las representaciones manipulativas, las representaciones icónicas, el lenguaje formal y las representaciones simbólicas.

Metodología

El tipo de investigación aplicado fue descriptivo. La población utilizada fue la de 32 alumnos que ingresaron a la carrera de la Licenciatura en Educación Mención Matemática y Física en el año 2004. Las técnicas utilizadas para la recolección de la información y el análisis de los datos, consistió en el análisis cualitativo del contenido de las producciones de los estudiantes del cuestionario anexo, para el cual se determinaron unas categorías de análisis que se muestran a continuación:

TABLA DE OPERACIONALIZACIÓN DE CATEGORÍAS

CATEGORÍA	SUBCATEGORÍAS	PROPIEDADES
Interpretación de la fracción	Como parte-todo	Tipo de representación y de error
	Como reparto	Tipo de representación y de error
	Como operador	Tipo de representación y de error
	Como razón	Tipo de representación y de error
	Como medida	Tipo de representación y de error
	Como número decimal	Tipo de representación y de error
	Como número racional	Tipo de representación y de error

Fuente: Ríos (2006)

Pre-concepciones del concepto de fracción

Interpretación de la fracción como parte todo (ítem 1, respondido por 48 alumnos)

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en la primera parte son los siguientes: escriben $1/4$, determinando con este símbolo cada parte en que ha sido dividida la unidad; escriben $1/3$, determinando con el uno la parte no subrayada, y con el tres el área subrayada; escriben $4/3$, determinando con el numerador las partes en que ha sido dividida la unidad, y el denominador el área subrayada; y escriben 3, contando la cantidad de partes subrayadas

El nivel de complejidad de la segunda pregunta, en cuanto a los números mixtos o fracciones impropias, aumenta pues por las producciones de los alumnos se observa que se les dificulta comprender que unidades completas pueden ser entendidas como parte de una fracción; para algunos prevalece la idea que la fracción se refiere a un área menor que el área total de la unidad. Se observa que esta pregunta presenta un nivel de dificultad mayor que la anterior, pues para la primera parte de la pregunta, 34 alumnos (70,85%) responden correctamente, mientras que para la segunda parte de la pregunta, 20 alumnos (41,66%) responden correctamente. Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en la segunda parte son los siguientes: escriben $4/6$, con el numerador identifican el área rayada y con el denominador las partes en que ha sido dividida las dos unidades. En este caso, la unidad es entendida como los dos rectángulos; escriben $4/2$, donde el numerador indica el área rayada y el denominador el área no rayada; escriben $3 \frac{1}{3}$, donde el entero cuenta las partes rayadas y el $1/3$ simboliza correctamente la fracción propia del número mixto correspondiente; escriben $3/3 \frac{2}{3}$, donde el entero identifica correctamente

la unidad completa, pero la fracción propia identifica con el numerador el área no rayada; escriben $1/3$, determinando el área rayada en la segunda unidad; escriben $6/4$, con el denominador identifican el área rayada y con el numerador las partes en que ha sido dividida las dos unidades. En este caso, la unidad es entendida como los dos rectángulos nuevamente; escriben $2/4$, donde el denominador indica el área rayada y el numerador el área no rayada; escriben $3/3$ $1/1$; y escriben $3/4$ $1/4$

Interpretación de la fracción como reparto (ítem 2, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos, se observó la utilización de una variedad de representaciones externas; la gran mayoría utilizó las representaciones gráfica, complementando éstas con otras. En las producciones de los alumnos, en la primera pregunta, prevalece la representación gráfica sobre la simbólica, escrita, algebraica y aritmética; la representación gráfica es realizada por 21 alumnos, 43,75%; la representación aritmética por 16 alumnos, 33,33%; la escrita por 14 alumnos, 19,16%; la simbólica por 9, 18,75%; y la algebraica por un alumno.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos son los siguientes: dividen las dos pizzas en la misma cantidad de partes (10, 8, 5), ya sean iguales o desiguales, y especifican la cantidad de pedazos que le toca a las cinco personas. En este caso, aun y cuando mantienen la división para las dos unidades, la respuesta es dada de manera intuitiva, pareciese que no se conoce el símbolo correspondiente a la respuesta; dividen una pizza en la misma cantidad de partes (4, 3 y 5) y la otra en otra cantidad de partes (6, 2, 10), y especifican la cantidad de pedazos que le toca a las cinco personas. No mantienen las divisiones en las dos unidades, lo importante es que la suma de los pedazos sea múltiplo de 5, para poder hacer la repartición. Al igual que en el caso anterior, pareciese que no se conoce el símbolo correspondiente a la respuesta, pues las respuestas son dadas en forma intuitiva; grafica correctamente, pero especifica como respuesta $2/10$. En este caso nuevamente establecen como la unidad las dos pizzas; y especifican como respuesta $5/2$. En este caso, invierten los elementos de la fracción respuesta

Los errores referidos a la elección inadecuada de la estrategia de solución, se evidencia cuando los alumnos al graficar la situación dividen las unidades en cantidades diferentes. Un alumno comete el error de tipo teórico cuando plantea mal la ecuación

Interpretación de la fracción como operador (ítem 3, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación aritmética sobre la simbólica, gráfica y la escrita; la representación aritmética es realizada por 65 alumnos, 34,39%; la representación simbólica por 57 alumnos, 30,15%; la gráfica por 5 alumnos, 2,64% y la escrita por 3 alumnos, 1,58%

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem se manifiestan cuando escribe un alumno, $\frac{300}{1/3} = 100$; $100 \times 2 = 200$. Los

errores debido a la ejecución de las tareas, se traducen cuando establecen la operación correcta, pero la respuesta es incorrecta; $200/300$, $600/900$ y $298/3$. Para el primer caso establecen la razón de la respuesta con respecto a la totalidad, en el segundo caso aplican erradamente la multiplicación de un entero por una fracción, multiplicando ambos elemento por el número natural; y el tercer caso aplican lo siguiente: $(300-2)/3$. Los errores debido a la incomprensión de la pregunta se manifiestan cuando los alumnos establecen respuestas como las siguientes: $2/3$, $52,6$; 2×10^6 , $20/5$, 150 , 8 y descomposición del 300 en factores primos.

Interpretación de la fracción como medida (ítem 4, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos, prevalece la representación simbólica sobre la escrita; la representación simbólica es realizada por 35 alumnos, 72,91% y la representación escrita por un alumno

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben $3/5$; estos alumnos entienden la pregunta al revés, es decir qué parte de B cabe en A; escriben $1/3$ y $2/3$; escriben $3/3$; estos alumnos no conciben las fracciones mayores de la unidad como partes de la totalidad; para éstos una parte de la totalidad debe ser menor que ésta; y escriben 3 partes; esta respuesta muy parecida a la anterior, pero mas intuitiva, pues no logran establecerla mediante símbolos

Interpretación de la fracción como número decimal (ítem 5, presentado por 48 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación escrita sobre la aritmética; la representación escrita es realizada por 26 alumnos, 54,16% y la representación aritmética por un alumno.

Los errores referidos a la deficiencia teórica, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben que uno es decimal y el otro, fracción; estos alumnos establecen diferencias en cuanto a la forma del número; y escriben que representan la misma cantidad, pero no justifican su respuesta

Interpretación de la fracción como razón (ítem 6, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos prevalece la representación simbólica sobre las demás; la representación simbólica es realizada por 97 alumnos, 51,32%; la representación aritmética por 6 alumnos, 3,17%; la escrita por cuatro alumnos, la gráfica por 3 alumnos, y la algebraica por dos alumnos.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: escriben $25/15$ y $5/3$; estos alumnos confunden los elementos de la fracción respuesta; escriben $25:15$; además de confundir los elementos de la respuesta utilizan la interpretación de fracción como división indicada; escriben $15 \times 5/3 = 25$; estos alumnos tratan de establecer el operador que le permite transformar un número en otro. Los errores debido a la incomprensión de la pregunta se traduce cuando los alumnos escriben 10, lo que le falta a 15 para ser 25

Interpretación de la fracción como número racional (ítem 7, presentado por 189 alumnos)

En las producciones de los alumnos, en la primera pregunta, prevalece la representación simbólica sobre la escrita y la aritmética; la representación simbólica es realizada por 32 alumnos, 16,93%; la representación escrita por 31 alumnos, 16,4% y la aritmética por 7 alumnos, 3,7%.

Los errores referidos a la complejidad del símbolo, que presentan las producciones de los alumnos en este ítem son los siguientes: establecen los elementos de la potencia: la base y el exponente; expresan que los exponentes negativos no existen; escriben que es equivalente a -2, porque el exponente es negativo; expresan que se invierte el número, pero no lo hacen; y escriben $2/1$ y $-1/2$.

Conclusiones

Por la naturaleza de las preguntas, las representaciones externas de las respuestas dadas por los alumnos para las interpretaciones como medida y parte todo, son exclusivamente simbólicas; en la interpretación reparto la gráfica y la simbólica son muy parejas en su uso; en la interpretación como operador la aritmética y la simbólica son las que prevalecen; en la interpretación como número decimal prevaleció la escrita; en la interpretación como razón la

representación simbólica está por encima de las demás representaciones; en el caso de los números racionales, se usan en igual medida las representaciones simbólica y escrita.

Se observa que más del 78% de la muestra desconocen la interpretación como número racional; la interpretación como medida de la fracción propia es la más conocida, por más del 92% de la muestra, y le sigue la interpretación como parte todo para la fracción propia con un 87%, y las otras interpretaciones son desconocidas entre el 20% y 41% de la muestra. Se concluye que para los alumnos, la interpretación que tiene mayor grado de complejidad es la de número racional.

Los errores que se evidencian en todas las interpretaciones, menos la decimal son debido a la complejidad del símbolo; la de mayor porcentaje fue la interpretación como medida impropia (70%), le sigue parte todo impropia (47%), luego reparto impropia (43%), le sigue racional no entero (42%), reparto propia (38%), medida propia (37%), razón (34%), racional entero (26%), parte todo propia (19%) y operador (2%). En esta última, se presentan errores en cuanto a la especificidad de la respuesta (41%) e incomprensión de la pregunta (19%).

Referencias bibliográficas

- Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación, *Revista UNO. Didáctica de las Matemáticas*, 4, 53-61
- Blázquez s. y Ortega T. (2001). Sistemas de representación en la enseñanza de límite, *Revista Relime*, 4 (3), 100-120
- Maza, C. (1995). Representaciones externas, En Maza, C., *Aritmética y representación: De la comprensión del texto al uso de materiales* (pp: 119-130), México: Paidós
- Pérez, A. (1995). La representación en la resolución de problemas en Matemática, *Revista Laurus*; 2 (1), 20-25
- Segovia I. y Rico L. (1999). Unidades didácticas. Organizadores, *Revista de Educación Matemática*; 13 (2), 83-104.

Anexo: cuestionario

1. ¿Qué parte de la unidad representa la parte rayada?

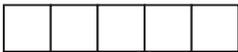
a)  _____

b)   _____

2. Se tienen dos pizzas y se quieren repartir en partes iguales, entre 5 personas ¿Cuánto le toca a cada uno? Haz una representación gráfica. Si realizas alguna operación, escríbela

3. ¿Cuántos bolívares representan los $\frac{2}{3}$ de 300 bolívares? Si realizas alguna operación, escríbela

4. Cada una de las siguientes piezas, se representan por las letras A y B

a) ¿Qué parte de A cabe en B? _____  

b) ¿Qué parte de B cabe en A? _____

5. Se sabe que 0,5 y $\frac{1}{2}$ representan la mitad de la unidad. Explique cuál es la relación entre los dos números. Si realizas alguna operación, escríbela

6. Se tienen en un aula 25 estudiantes ¿Qué fracción representan las hembras, si hay 10 varones? Si realizas alguna operación, escríbela

7. ¿Qué simboliza 2^{-1} ? Explica tu respuesta