

LA REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TRANSFERENCIAS DE REGISTROS

María Lourdes Rodríguez González, Louremy Ricardo Rodríguez, Cila Mola Reyes
Universidad de Camagüey. (Cuba)

Dirección Provincial de Planificación Física. (Cuba)

maria.rodriguez@reduc.edu.cu, cila.mola@reduc.edu.cu

Campo de investigación: pensamiento geométrico. Nivel educativo: superior

Palabras clave: representación, transferencia de registros

Resumen

En este trabajo se ofrece un estudio sobre la habilidad de representar en la Matemática desde la perspectiva de la transferencia de registros; se parte de hacer un análisis de diferentes puntos de vista de lo que significa representar y se muestran a través de ejemplos como las autoras de este trabajo han abordado en clase diferentes formas de representación. Al considerar que un objeto matemático se representa por una expresión algebraica, por una forma tabular, por una gráfica o por una palabra requieren de un conocimiento y del manejo correcto de los entes geométricos para interpretar la relación entre la ciencia matemática y la realidad objetiva.

Introducción

Con el surgimiento de la existencia humana desde hace muchos milenios aparece la comunicación. Con el desarrollo del tiempo surgió la necesidad de contar con formas más efectivas para establecer una relación más estrecha unos con otros y de manera más eficaz se llega al lenguaje hablado, el uso de la palabra como medio más importante de comunicación mediante la cual se desarrolla y se materializa el pensamiento.

A medida que fue desarrollándose el conocimiento humano, se hizo necesaria la escritura para transmitir información. Los pueblos antiguos buscaban un medio para registrar el lenguaje, pintaban en las paredes de las cuevas para enviar mensajes y utilizaban signos y símbolos para designar una tribu o pertenencia. Al desarrollarse estos elementos ideográficos, el símbolo no sólo representaba el objeto, sino también ideas y cualidades asociadas a él. Esta forma de comunicación no verbal, es conocida con el nombre de representación.

Desarrollo

Existen tres tipos de problemas geométricos, a saber: de demostración, de cálculo y de representación. Los problemas geométricos de representación espacial, son aquellos en que se plantea realizar una modelación de la realidad objetiva ya sea en la mente del estudiante o materializada a través del dibujo o en objetos constructivos, para destacar relaciones de posición, de orden, de tamaño, de continuidad, de igualdad y otras; así como movimiento de cuerpos en el espacio.

Las autoras de este trabajo asumen lo expresado por la Dra. María L. Rodríguez en su tesis doctoral cuando plantea que: “La *representación geométrica espacial* se puede clasificar en: *Mental*: le permite al estudiante prever situaciones, estimar distancias y tamaño; así como orientarse en el espacio físico. Y *Manual*: Los objetos concretos son una guía para comprender las propiedades de las figuras geométricas” (Rodríguez, 2003).

Por otro lado según el Dr. Quintero distingue que: “El *dibujo* no es más que un lenguaje gráfico que surge a partir del lenguaje verbal, el dibujo, en tanto es proceso de comunicación, se basa en un código o lenguaje que debe ser conocido por el emisor y el receptor del mensaje, si se desconoce o no se sabe interpretar ese código, el proceso de comunicación no se concreta. Y la *figura* es un objeto ideal que se puede representar por medio de un dibujo” (Quintero, 2002).

¿Que es representar?

En psicología, se entiende por representar a aquella imagen que la mente humana crea como parte de los procesos del pensamiento y las percepciones del mundo exterior, en nuestra mente nos representamos un objeto.

En filosofía, se entiende por representar a aquella imagen reflejada idealmente en la cabeza del hombre sin que el objeto de la representación este presente.

La representación deviene realidad mediante la práctica multilateral del hombre, es decir, la representación adquiere en plasmación real diversas formas, una de las cuales es el modelo, por lo tanto el modelo ya sea en su aspecto teórico o empírico concreto (maquetas, dibujos, gráficas, pinturas, esculturas, etc.) es el resultado de la objetivación de las imágenes en su forma sensible.

Las autoras de este trabajo coinciden con el Dr. Joaquín Álvarez cuando expresa que: “la habilidad de representar es una macrohabilidad” (Álvarez, 2002), ya que la Matemática como ciencia abstracta y compleja le esta asociada a esta habilidad las habilidades siguientes para su comprensión y apropiación:

Identificar: Distinguir el objeto de estudio matemático, sobre la base de sus rasgos esenciales. Determinar si el objeto pertenece a una determinada clase de objetos que presentan características distintivas.

Interpretar: Atribuir significado a las expresiones matemáticas de modo que éstas adquieran sentido en función del propio objeto matemático o en función del fenómeno o problemática real de que se trate.

Modelar: Asociar a un objeto no matemático un objeto matemático que represente determinados comportamientos, relaciones o características suyos.

Codificar es un sistema de transmisión de la información en que el sentido que esta está expresada en códigos matemáticos

Recodificar: Transferir la denominación de un mismo objeto de un lenguaje matemático a otro. A veces puede interpretarse como transformar el objeto.

Definir: Establecer mediante una proposición las características necesarias y suficientes del objeto de estudio.

Graficar: Representar relaciones entre objetos matemáticos, tanto desde un punto de vista geométrico, como de diagramas o tablas y recíprocamente, colegiar las relaciones existentes a partir de su representación gráfica.

Por otro lado; Duval plantea que existen: “diferentes registros de representación semiótica relacionado con el funcionamiento cognitivo del pensamiento” (Duval, 1998).

Luego para que el estudiante logre la adquisición de las habilidades antes mencionadas y logren la macrohabilidad de representar deben realizar ejercicios geométricos asociados a las diferentes transferencias de registros. Según la forma de expresión escogida para el

tratamiento de la información, se puede hablar de diferentes formas de Representar asociada a las transferencias de Registros; ellas son:

Transferencia del registro verbal- simbólico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica palabras y términos claves que transforma el lenguaje verbal al simbólico en una determinada etapa de resolución de un problema).

Transferencia del registro simbólico - gráfico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica términos simbólico del problema que resuelve que transforma a otro modelo matemático simbólico equivalente en una determinada etapa de su solución).

Transferencia del registro gráfico- gráfico (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica términos simbólicos del problema que transforma a otro modelo matemático simbólico equivalente en una determinada etapa de su resolución).

Transferencia del registro gráfico- símbolo (Es aquella codificación mediante la cual el sujeto identifica aspectos geométricos correspondientes al problema que resuelve, los transforma al lenguaje simbólico en términos de un modelo equivalente en una determinada etapa de resolución del problema).

Para que el proceso enseñanza aprendizaje sea efectivo hay que motivar al estudiante y llevarlo a situaciones que simulen la futura actividad profesional. Por ejemplo en la Introducción de una clase a modo de motivación la misma puede comenzar con una actividad implementada a través de la simulación de una situación, que expone el concepto que se pretende enseñar.

Esto tiene como objetivo introducir al alumno en el problema desde una “situación práctica”, que lo conduzca de forma intuitiva hacia el concepto que debe aprender.

Un ejemplo de tarea dejado en la clase anterior con la que puede comenzar la clase de sólido puede ser el siguiente:

Dadas las siguientes superficies: $X^2 + Y^2 + Z^2 = 16$; $X^2 + Y^2 = 4$; $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$; $Y = 1$; $X = 0$; $Y = 0$; $Z = 0$; $Y = X$; $X + Z = 4$; $Z = 2$.

- Identifique cada ecuación. b) Seleccione como mínimo 6 de ellas.
- Represéntelas en un mismo sistema.
- Determine la curva de intersección de las superficies tomando dos a dos.
- ¿Lo que usted representó determina un cuerpo?

A partir de aquí el profesor conjuntamente con sus estudiantes introduce las técnicas de representación de un sólido. Luego define que es un sólido.

Otro ejemplo de motivación que pudo haber dejado como estudio independiente es la construcción de un cuerpo elegido por ellos y la técnica de construcción por lo que observan ellos de la realidad. Con esta actividad se pretenden enriquecer el lenguaje gráfico de los estudiantes y su relación con el verbal y el algebraico. Con ejemplos como los anteriores los estudiantes no ven la construcción de sólido como algo impuesto por el profesor sino como una necesidad después el profesor realiza las diferentes observaciones para que el sólido quede correctamente construido. Por lo tanto para construir un sólido se siguen diferentes metodologías en dependencia de la forma de representar el sólido y del tipo de transferencia de registro que se presente.

La transferencia de registro más común en los libros de textos de Matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría para Ciencias Técnicas es la de *Transferencia del registro algebraico al gráfico*. La cual se muestra a continuación.

En la misma se tiene la expresión analítica de un sólido y su metodología en general para su representación es la siguiente:

1. La selección del sistema gráfico de representación.
2. Identificar las superficies que delimitan el sólido.
3. Representar en el sistema seleccionado las superficies identificadas
4. La determinación y trazado de las aristas rectas o curvas de intersección de las superficies tomadas dos a dos.
5. Determinar cual es la región comprendida por el sólido, con ayuda de la expresión analítica del mismo.
6. Reforzar el contorno del sólido con líneas gruesas, continuar las aristas visibles y discontinuas para las aristas no visibles, teniendo en cuenta los principios de visibilidad.

Ejemplo1: Dada la expresión analítica del sólido.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: X^2 + Y^2 \leq 4; 0 \leq Z \leq 4; 0 \leq Y \leq X\}. \text{ Constrúyalo.}$$

Para la construcción del mismo se siguen los siguientes pasos metodológicos:

1. La selección del sistema gráfico de representación que fundamentalmente. En matemática se utiliza el sistema axonométrico usando el dibujo de perspectiva caballera.
2. Se identifican las superficies que lo limitan.
3. Se representan las porciones de cada superficie que hacen falta, en el sistema cartesiano rectangular del espacio, se toman dos a dos las superficies para determinar las aristas de intersección de las caras del sólido. (Anteriormente se explicó la forma de determinar las aristas curvas de intersección entre dos superficies, aquí no se usarán planos auxiliares para no sobrecargar la representación)
4. Haciendo un análisis de las desigualdades de la expresión analítica se determina en que parte del espacio tridimensional es que se va a encontrar el sólido. (Generalmente se toman puntos sobre los ejes coordenados y se analizan las superficies que intervienen) En nuestro caso el sólido se encuentra en la región anterior izquierda superior (1er Octante).
5. Identificándose por último cual es el sólido (se trazan con líneas gruesas y continuas la parte visible y con líneas gruesas y discontinuas las no visibles).

Sin embargo no se realizan de forma general *Transferencia del registro gráfico al algebraico* que contribuye a que el estudiante desarrolle la habilidad identificar correctamente las superficies que limitan a un sólido

Ejemplo 2: Se le puede dar la representación gráfica de un sólido para que escriban su expresión analítica. a) Haciendo un análisis de las generatrices (trazas sobre los planos coordenados) o de las directrices (que pueden ser también trazas) además, de las aristas de intersección entre las superficies, el sólido queda determinado por las superficies.

Supongamos que el sólido dado este limitado por las siguientes superficies:

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 4 \text{ Hiperboloide de una hoja}$$

$$Z=1 \text{ Plano proyectante básico paralelo al plano } XY$$

$$Z=3 \text{ Plano proyectante básico paralelo al plano } XY$$

$$Z=0 \text{ Plano coordenado } XZ; Y=0 \text{ Plano coordenado } XZ$$

b). Es importante que el estudiante sepa identificar la región del espacio el cual ocupa el sólido en el espacio real: El estudio anterior nos informa que el sólido se encuentra en la región superior izquierda anterior (Primer Octante). Además se encuentra en la región posterior del hiperboloide de una hoja $X^2 + Y^2 - Z^2 = 4$, en la región superior al plano $Z=1$ y en la región inferior al plano $Z=3$

c). Después de haber realizado el estudio de las superficies y de la región que ocupa el sólido representado el estudiante puede escribir su expresión analítica que es la siguiente:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: X^2 + Y^2 - Z^2 \leq 4; 1 \leq Z \leq 3; X \geq 0; Y \geq 0\}$$

En oportunidades se tienen las diferentes vistas o proyecciones ortogonales de un sólido y se quiere obtener su expresión analítica, el procedimiento es construirlo y luego hacer el análisis anterior, en este tipo de ejercicio se pone de manifiesto la *Transferencia del registro gráfico al gráfico*.

Ejemplo 3: Dado el sólido en su forma gráfica, determine las proyecciones ortogonales o vistas del mismo. (Se da en el ejercicio la representación gráfica del sólido)

La metodología de trabajo para realizar es la siguiente:

1. Aplicación de la tríada de conceptos básicos referentes a caras y aristas, en los casos convenientes.
2. La determinación de los cilindros o planos proyectantes que la determinan.
3. Aplicar los principios de visibilidad para las proyecciones ortogonales es decir, identificar las caras y las aristas que están visibles u ocultas en las tres vistas.

Otra transferencia que desarrolla la expresión y el lenguaje de la matemática es la *Transferencia del registro verbal al gráfico*.

La misma se puede expresar con el siguiente ejemplo 4: Represente la región del espacio comprendida en el primer octante, interior al cilindro $X^2 + Y^2 = 9$, su parte superior esta limitada por el plano $Z = 4$, y esta a la derecha del plano $Y = X$.

Cuando en las clases de construcción de sólido se realizan ejercicios en los cuales se ejercitan las diferentes habilidades y el profesor verifica que sus estudiantes las han adquiridos; es que puede orientar la realización de *Ejercicios de generalización*.

A continuación se muestran algunos tipos de estos ejercicios:

1. Dadas las proyecciones gráficas de un poliedro.
 - Escriba las expresiones analíticas de las mismas.
 - Construya el poliedro o el sólido que origina dichas proyecciones gráficas.
 - ¿Qué expresión analítica tendrá el poliedro o sólido obtenido?
 - Enuncie usted el problema, si lo que tiene es la proyección de forma analítica del poliedro o del sólido y quiere buscar sus proyecciones ortogonales de forma gráfica.
2. Ejemplos de aplicación a la especialidad (Arquitectura): Las paredes de una casa están soportadas por las superficies siguientes: $X = 0$; $Y = 0$; $Y = 2$; $X^2 + Y^2 = 9$ y el piso por $Z = 0$.
 - Seleccione una o varias superficies para soportar el techo de dicha casa de las siguientes: $Y^2 + Z^2 = 9$; $X^2 + Y^2 + Z^2 = 9$; $Z = 4$; $x + y = 4$; $y + z = 4$.
 - Represente en Isométrico o Perspectiva Caballera la configuración de la casa, haciendo abstracciones de las ventanas y demás detalles de la casa.
 - Escriba la expresión analítica del sólido obtenido.
 - Determine una proyección tanto gráfica como analítica.
3. Estudio Independiente para la casa. Diseñe la planta de un sencillo apartamento (o vivienda).
 - a) Represente la elevación principal (vista de frente).
 - b) Represente la elevación que corresponda a la vista lateral (vista lateral).
 - c) Construya la volumetría.
 - d) Haga un análisis geométrico donde: identifique por sus ecuaciones cada superficie que conforman las paredes, piso y techo de dicho apartamento.
 - e) Escriba la expresión analítica del sólido que se obtiene al realizar el diseño de dicho apartamento.

4. Dibuje el sólido definido por: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+z \leq 10, X - Z \leq 5, 0 \leq y \leq 20, x \geq 0, z \geq 0\}$
Antes de comenzar a dibujar se deben realizar algunas aclaraciones para especificar las diferencias entre la forma de dibujar el AutoCad y cómo lo hace en la geometría convencional. En AutoCad no se pueden representar planos indefinidos por lo que es imprescindible trabajar con las trazas de dichos planos. Para representar los sólidos se debe partir de un volumen inicial definido como sólido del cual se obtendrá, por medio de cortes sucesivos, el sólido pedido.

Por ejemplo: Partir de un cubo del cual por medio de cortes sucesivos se obtendrá otro sólido. En relación con el tema, se obtiene que el problema que plantea la representación de sólidos se centra en cómo dibujar en dos dimensiones un objeto tridimensional y cómo, a partir de la representación en dos dimensiones de un objeto, se puede reconstruir en sus tres dimensiones reales, este proceso se hace complejo, ya que no se dibuja sólo para sí, sino que en ciertas etapas se hace necesario comunicar a otros alguna característica del objeto en cuestión y debe ser entendido correctamente.

Conclusiones

De las ideas elaboradas anteriormente, se puede destacar que: “la habilidad de representar, en el caso de la matemática es una habilidad en extremo compleja, que desencadena una fuerte actividad interna y externa y que se desarrolla en ciclos sucesivos y simultáneos de acción interna y externa, por lo que su estudio, para su aplicación a un diseño didáctico para su enseñanza y aprendizaje, debe enfocarse como un proceso”.

Por todo lo antes mencionado se puede concluir: Primero, que las diferentes formas de representación desarrollan diferentes destrezas cognoscitivas. Segundo, la selección de una forma de representación influye no sólo lo que uno es capaz de representar, influye en lo que uno es capaz de ver. Tercero, las formas de representación pueden combinarse para enriquecer el conjunto de recursos a los cuales los alumnos pueden responder. Y cuarto, cada forma de representación puede ser usada de diferentes maneras y cada manera requiere el uso de destrezas y formas de pensamiento diferentes.

Referencias bibliográficas

- Álvarez. J. (2002). El desarrollo de la representación grafica en el arquitecto. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
- Rodríguez M. L. (2003). Modelo holístico para el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría para arquitectos. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
- Quintero. R. N. (2002). Metodología para perfeccionar el desarrollo de las habilidades de interpretar y representar de los estudiantes en los centros politécnicos industriales de la provincia de Camagüey durante el aprendizaje del dibujo. Tesis doctoral en Ciencias Pedagógicas. Camagüey. Cuba.
- Ballester P. S. (1992). *Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Ministerio de Educación. Editorial Pueblo y Educación.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. Traducción de *Régistres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée* 1993.