

LA MODELACIÓN Y LA TECNOLOGÍA EN LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Francisco Cordero Osorio , Liliana Suárez Téllez , Jaime Mena Lorca , Jaime Arrieta Vera , Ruth Rodríguez Gallegos , Avenilde Romo Vázquez , Alin Cârsteanu , Miguel Solís Esquinca
Centro de Formación e Innovación Educativa. Instituto Politécnico Nacional México
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso Chile
Universidad Autónoma de Guadalajara México
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey México
Université Paris 7 Francia
Universidad Autónoma de Chiapas México
fcordero@cinvestav.mx , lsuarez@ipn.mx , jmena@ucv.cl , jaime_arrieta@hotmail.com ,
ruthrdz@itesm.mx , romo@math.jussieu.fr , alin@math.cinvestav.mx , solise@unach.mx
Campo de investigación: Modelación matemática Nivel: Superior

Resumen. *La modelación se encuentra en auge en las actividades de aprendizaje de la matemática, sobre todo cuando se les incorpora tecnología. Por ello, las concepciones de modelación están jugando un papel importante en la Matemática Educativa. Tales concepciones tensan aspectos sobre lo que se entiende como conocimiento matemático. Una de las creencias frecuentes en las prácticas de enseñanza de la matemática consiste en que la modelación es una aplicación de la matemática. Ello conlleva enseñar matemáticas y después buscar la aplicación de tal conocimiento. Contrariamente a tal idea, el grupo de investigación en conformación al seno de las RELME, llamado Grupo de Modelación y Tecnología (MyT) discute con base en sus programas de investigación que la modelación es, en sí misma, una construcción social del conocimiento matemático.*

Palabras clave: modelación, tecnología, enseñanza de las matemáticas

Introducción

El Grupo de Discusión de Modelación y Tecnología (MyT) tiene como tarea principal establecer un estado del arte a la luz de las aproximaciones teóricas de las investigaciones en cuestión realizadas por los miembros del Grupo. La síntesis del desarrollo del Grupo MyT es difícil por las múltiples direcciones en que se avanza. Sin embargo, tomando en cuenta la naturaleza de los trabajos del Grupo, se percibe la importancia que ha tenido la identificación y conformación de epistemologías, el interés en discutir y presentar categorías y ampliaciones teóricas de la disciplina y la mirada constante a las necesidades del sistema educativo. En ese sentido proponemos tres aspectos para el trabajo de dicho estado del arte: lo epistemológico, lo científico y lo social. El primero reflejará la matemática que se trastoca y se reorganiza, el segundo el conocimiento que se está construyendo en el tópico del Grupo MyT y el tercero las respuestas que se han logrado a las demandas sociales.

1717

Con estas consideraciones cuestionaremos la pertinencia de construir escenarios educativos donde se haga explícita la modelación matemática, a través de tres grandes preguntas: ¿Qué quiere decir modelación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?; ¿Cuál es su relación con la tecnología? y ¿Cuáles deberán ser los cambios curriculares?

Los objetivos del Grupo MyT consisten en conformar un grupo permanente de investigadores, en red, de especialistas de modelación escolar desde diferentes perspectivas teóricas en el campo de la Matemática Educativa y en formular el Programa de Investigación que le dará la identidad latinoamericana al Grupo.

El estatus epistemológico. La construcción del conocimiento matemático

A la luz de las investigaciones el objetivo es explicar la matemática que se ha generado o reorganizado. Por ejemplo, las explicaciones de contenidos matemáticos en sus dimensiones funcional y razonada, así como en la alternancia de saberes que la modelación y tecnología propician.

Empecemos con una visión general para después irnos a la especificidad de la matemática educativa. El problema fundamental que conlleva la enseñanza de la modelación matemática es el hecho de que ésta se traslapa en gran medida con todo el contenido de las matemáticas, en particular, y de las demás ciencias exactas, en general, ya que todas las leyes de la naturaleza que conocemos se expresan por medio de modelos matemáticos (y muchas de ellas ni se pueden expresar de otro modo, por su complejidad intrínseca). Lo anterior no se refleja en los currículos, ya que, por ejemplo, el modelo lineal de la elasticidad de los materiales no se presenta como tal, sino como “la Ley de Hooke”, como si su descubridor la habría decretado y consecuentemente cualquier material elástico que la desobedeciera sería intransigentemente castigado, en lugar de ser presentada como parte del esfuerzo más general de modelar el comportamiento de los materiales bajo la acción de diferentes tipos de fuerzas, dentro del cual Hooke contribuyó con un modelo lineal para la deformación de los materiales elásticos – y de la misma manera sigue la enseñanza de la mayoría de las leyes conocidas en el marco de las ciencias exactas. Otro problema importante se presenta en la dimensión epistemológica de la modelación matemática: la dicotomía entre el papel de la modelación en la construcción del conocimiento y el papel de la

misma en realizar aproximaciones del funcionamiento de los procesos naturales. Conocer y aproximar, siendo dos papeles igual de válidos de la modelación matemática, constituyen el carácter dialéctico de la misma, lo que se ven poco reflejado en la enseñanza, donde frecuentemente se encuentran enfoques que tratan de fomentar la idea que alguno de los dos papeles sería la “verdadera misión” de la modelación matemática.

La dimensión social de la epistemología en sus aspectos matemáticos en general y de modelación matemática en particular es también un asunto muy delicado, ya que el procesamiento del conocimiento matemático a nivel social –procesamiento que valida y potencia aquellos conocimientos que llegan a beneficiar a la sociedad humana– se ve seriamente afectado por la falta de antecedentes matemáticos en la mayoría de los sujetos involucrados. Por lo tanto, el conocimiento matemático ha sido históricamente más individualizado que otras áreas del conocimiento humano, lo que ha privado la modelación matemática de la potenciación mencionada por parte de la sociedad. Por ende, el desarrollo de la epistemática (ciencia del procesamiento automático del conocimiento) se encuentra también en una fase muy incipiente, contrastante con sus posibilidades y las necesidades históricas que la generaron. Sin embargo, más allá de la problemática teórica que conlleva la enseñanza de la modelación matemática, existe una carencia general de enseñar la metodología de la modelación (las etapas de la construcción de un modelo, sus criterios de elección, sus métodos de parametrización, su validación, entre otros), ya que ésta no aparece implícitamente en los demás cursos de ciencias exactas impartidos.

Por otra parte vale la pena comentar que el proyecto Tuning que surge en Europa (http://ec.europa.eu/education/policies/educ/tuning/tuning_es.html) ha logrado proyectarse en otras latitudes y así tenemos la versión en Latinoamérica que ha propiciado que las instituciones de educación superior de esta región estén enfrentadas a plantear currículos basados en competencias. Las carreras de ingeniería han sido las primeras en ser tocadas y por ende la formación en matemática está siendo requerida en esos términos. Afortunadamente este repensar la formación en ingeniería (y otras carreras) está presionando a los matemáticos docentes a replantear su discurso ya que han surgido, por lo menos en Chile, modelación y uso de tics y manejo de la información, como competencias que los matemáticos y los de ciencias básicas deberían ayudar a desarrollar. La interpretación de estas palabras y cómo lograr el deseado desarrollo de competencias están presentes y es un problema al que hay que dar respuestas.

Si bien estas visiones generales son importantes, conviene entrar en materia. No hay una sola forma de concebir la modelación. Hoy día, a la modelación la ejercen comunidades en una gran variedad de escenarios. Así por ejemplo, la modelación es abordada tanto por grupos de investigadores en diversas disciplinas como por grupos en escenarios de la vida cotidiana. Los contextos de la modelación son cruciales ya que imprimen las particularidades de la práctica. Así, la modelación en el aula de matemáticas se plantea con diferentes intenciones. Se presenta bien para motivar algún tema de matemáticas, o bien como ejemplos de la aplicación de las matemáticas. Pero en ese sentido la modelación empieza a surgir con la intención de que los estudiantes construyan sus conocimientos, es decir se ejerce la modelación para la emergencia de conocimientos, los conocimientos matemáticos en particular. Un aspecto que queremos destacar es que la modelación transforma las entidades sociales que la ejercen, por ejemplo el individuo que desarrolla la modelación lo transforma en otro individuo.

El estatus científico. Los constructos teóricos en la Matemática Educativa

En este apartado el objetivo es discutir el conocimiento que necesariamente se ha tenido que construir en la disciplina de la Matemática Educativa, con relación a la MyT. Por ejemplo, perspectivas teóricas, nuevos conceptos y ampliaciones en las situaciones didácticas, en la ingeniería didáctica, en el funcionamiento cognitivo, en las funciones normativas de las prácticas sociales, los proceso institucionales, entre otros.

En ese tenor cabe destacar que el binomio Modelación-Graficación, se ha perfilado como una categoría para la matemática escolar. En esa línea de investigación, estamos interesados en favorecer el desarrollo de una matemática funcional en el sistema educativo. En consecuencia, la importancia de la investigación está en los aspectos teóricos y metodológicos que se formulan. Las prácticas de modelación y de graficación, por separado, han contribuido a proporcionar acercamientos innovadores al concepto de función (véase Arrieta, 2003 y Leinhardt et al, 1990). En los niveles superior y medio superior se han introducido como actividades que desarrollan habilidades de aplicación y visualización de los conceptos matemáticos. En la investigación hay una tendencia actual a destacar la importancia epistemológica de la modelación (Bosch et al, 2007) y de la graficación (Cordero 2006b).

Desde la Socioepistemología, se hace un planteamiento para la modelación escolar caracterizada a través de un uso de las gráficas (Suárez, 2008). El estudio, desde la perspectiva del *Tractatus de Oresme sobre la Figuración de las Cualidades* (Clagett, 1968) proporciona una explicación de la transformación de uso de las matemáticas de la época para abordar la problemática de las situaciones de cambio y variación. Esta transformación, caracterizada en este trabajo a partir del debate entre el funcionamiento y la forma del uso de las figuras geométricas, aporta los principales elementos de la hipótesis epistemológica sobre el uso de las gráficas en situaciones de modelación del movimiento para resignificar el cambio y la variación. La socioepistemología de la modelación-graficación se traduce en el diseño de una situación para trabajar con los estudiantes y conforma las secuencias llamadas Situaciones de Modelación del Movimiento (SMM) (Suárez, et al, 2005). Tenemos evidencia de que los elementos de funcionamiento de la Figuración de las Cualidades surgen en una SMM al identificar las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad que los participantes logran establecer como argumentos para explicar la variación en una situación de cambio. Y tenemos evidencias de las formas de uso de las gráficas a partir de la caracterización de los significados y los procedimientos que los participantes ponen en juego al establecer las relaciones entre las gráficas de la posición y la velocidad en una situación de cambio en los momentos del diseño de situación: donde establecen la forma, construyen los argumentos y los ponen en funcionamiento.

En esta misma perspectiva se cuestiona sobre la simbiosis entre las nociones de predicción y simulación. La investigación tiene el objetivo de reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de la forma $ay' + by = F(x)$ a través de situaciones gráficas de transformación, éstas consisten en identificar patrones de comportamiento de la función F al variar los coeficientes a y b de la ecuación diferencial e interactuar con los contextos gráficos y algebraicos. Una noción que permite reconstruir significados en el sentido de la socioepistemología, es el comportamiento tendencial de las funciones, noción *sui generis* del carácter funcional del conocimiento matemático cuya construcción está relacionada con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas, permitiendo formular categorías del conocimiento matemático que *a priori* no se encuentran dentro de la estructura matemática (Cordero, 2006a). A partir del diseño de las secuencias los estudiantes construyen argumentos de comportamientos gráficos y algebraicos que permiten identificar a la solución $y(x)$ con un

comportamiento tendencial hacia la función $F(x)$ (noción de predicción) y describir el comportamiento de la solución al variar los coeficientes a y b (noción de simulación). El resultado del estudio muestra que una relación simbiótica entre las nociones de predicción y simulación permite la reconstrucción de las ecuaciones diferenciales dotándolas de nuevos significados. Este estudio socioepistemológico de la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes establece un método de diseño de situación y de lectura de datos con el propósito de lograr un alcance de reproducción en el sistema educativo e ir propiciando el rediseño del discurso matemático escolar.

Las preocupaciones didácticas se manifiestan de manera distinta cuando se considera una formación profesional, como es el caso de ingenieros generalistas. En este contexto, el rol de la modelización matemática debe ser considerado en relación a la futura práctica profesional. Pero, ¿cuáles son las necesidades de dicha modelización en la práctica? Para dar cuenta de ello, es necesario el estudio de prácticas profesionales. En el marco de la investigación que aborda el tema del lugar que debe darse a las matemáticas en la formación de ingenieros, se estudia una actividad que simula una práctica profesional, los proyectos de ingeniería. Dichos proyectos, son una actividad diseñada por la institución formadora IUP (Instituto Universitario Profesional de Evry) para conectar dos instituciones, los laboratorios de investigación y el mundo profesional. Hemos realizado dos observaciones de proyectos durante dos años, la primera a título de pre-experimentación y la segunda constituye el trabajo experimental de nuestra investigación. El análisis de estos proyectos es realizado en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999). Particularmente, en uno de los proyectos hemos encontrado el uso de las ecuaciones diferenciales y la transformada de Laplace en tareas de modelización. Dichas tareas consisten en el uso de modelos “tipo”, modelos existentes que pertenecen a las disciplinas intermediarias, como es el caso de la automática. El objetivo que dirige el análisis es de determinar cuáles son los niveles de referencia que estos modelos y los objetos matemáticos inmersos establecen con tres instituciones, a saber: las matemáticas, las disciplinas intermediarias y la práctica misma. La modelización, como lo señalan Bissell y Dillon (2000) en la actividad práctica del ingeniero y más que basarse en la creación de nuevos modelos, consiste en la utilización y la adaptación de modelos existentes. De esta manera sabemos que las disciplinas intermediarias juegan un rol fundamental en la disposición de estos modelos, mediando entre la teoría y la práctica, para otorgar herramientas funcionales. Por otra parte, hemos investigado que una

formación matemática que no integre la modelización como una componente fundamental, está en riesgo de quedar a cargo de las disciplinas intermedias.

El estatus social. La incidencia al sistema educativo

Es de nuestro interés proporcionar respuestas a las demandas sociales en acciones como la formación de profesores e investigadores, los posgrados y la creación de redes, entre otras. Por ejemplo, para producir propuestas concretas es necesario considerar los resultados que miden los efectos y las dificultades de las propuestas que se han puesto en marcha.

Diversas dificultades han sido reportadas por investigaciones cuando se llevan al aula problemas donde el estudiante pueda “modelar” de manera más cercana a la modelación realizada por un experto o investigador. En particular, Rodríguez (2007) reporta la transposición didáctica (Chevallard, 1991) existente entre la modelación que practican los expertos y aquella llevada al ámbito escolar en el caso de una clase de Física y de Matemáticas en una preparatoria francesa. Otras dificultades reportadas tienen relación con el conocimiento previo del estudiante del contexto donde se modela así como de su conocimiento y su habilidad en el manejo de utilería matemática para modelar el mismo. Las intuiciones y concepciones del estudiante parecen jugar un rol importante en este proceso. En ese sentido, hemos realizado investigaciones sobre el tipo de tareas de modelación con la finalidad de entender las relaciones entre las praxeologías observadas en los libros de texto de matemáticas y física y las dificultades de los estudiantes al trabajar una actividad de modelación (Rodríguez, 2007). Sin embargo, creemos que un punto importante a desarrollar en futuras investigaciones es el abordar el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la modelación en el ámbito escolar desde una perspectiva cognitiva. Eventualmente, en base a los resultados de estos estudios, se podrán establecer lineamientos de diseño e implementación de situaciones de enseñanza y aprendizaje de determinadas nociones matemáticas que sean más favorables para aprender a modelar de manera más cercana a como los expertos lo realizan o como suceden las prácticas de modelación.

El Programa de Investigación

El estado del arte de las investigaciones de los miembros del grupo MyT revela que no es el estudio en sí mismo de la modelación su interés sino más bien lo son las prácticas y funcionamientos de ésta. Este enfoque ayuda a establecer la dirección de las investigaciones: a) sobre la justificación funcional y alternancia de saberes cuando se resignifica un conocimiento matemático (Cordero y Flores, 2007); b) sobre la categoría de predicción para resignificar diferentes dominios del Cálculo; c) sobre los argumentos como los organizadores del contenido que entra en juego en la situación presentado en diferentes versiones para convencer (Cordero, 2006a); d) sobre caracterizar la modelación desde una perspectiva donde las prácticas son centrales en las explicaciones de los fenómenos didácticos. En esta dirección se plantean cinco tesis: la experimentación, la toma de datos y la interacción con el fenómeno son necesarias para la práctica de modelación, más no son suficientes para caracterizarla. La suficiencia se logra (el primer acto de la modelación) cuando la situación obliga a salir del fenómeno para poder resolverla con herramientas fuera de él, o sea con los modelos. La modelación es un acto de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La modelación no es representación, es construir nuevas entidades a partir de la articulación, y con eso crea nuevas realidades. Y la construcción de un modelo está referida a su distinción de otra.

Referencias bibliográficas

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de Doctorado no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.
- Artaud, M. (2007). Some conditions for modeling to exist in mathematics classrooms. Modeling and Applications in Mathematics Education. *The 14th ICMI Study* (371-378). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
- Bissell y Dillon (2000). Telling Tales: Models, Stories and Meanings. *For the Learning of Mathematics* 20, 3–11.
- Borromeo, F. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38 (2), 86-95.

Bosch, M.; García, F.; Gascón, J. y Ruiz, L. (2007). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 18 (2), 37-74.

Buendia, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 3, 299-333.

Clagett, M. (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: University of Wisconsin Press.

Cordero, F. (2006a). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián., O y Romo, A. (Ed.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano*. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C., 265-286.

Cordero, F. (2006b). La modellazione e la rappresentazione grafica nella matematica scolastica. *La Matematica e la sua Didattica*, 20, 1, 59-79.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(1), 7-38.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, deuxième édition. Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse de pratiques d'enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Leinhardt, G.; Stein, M.; Zaslavsky, O. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Doctoral dissertation, University Joseph Fourier, Grenoble, France.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación. Una Categoría para la Matemática Escolar*. Resultados de un Estudio Socioepistemológico. Tesis no publicada del Departamento de

Matemática Educativa Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Suárez, L. y Cordero, F. (2008). Use of graphs in change and variation modeling. Figueras, O., Cortina, J.L., Alatorre, S., Rojano, T., & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 1, 311.

Suárez, L.; Carrillo, C.; López, J. (2005). Diseño de Gráficas a partir de Actividades de Modelación. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18* (pp. 405-410). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.