

## EL ENTORNO DE APRENDIZAJE DINÁMICO MODULAR ORIENTADO A OBJETOS EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Juan Baltazar Cruz Ramírez, José Luis Ramírez Alcántara  
Universidad Autónoma de Guerrero  
cruzramirez@yahoo.com  
Campo de investigación: Educación a Distancia

México

Nivel: Superior

**Resumen.** *Se desarrollo una modelación de una ingeniería didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante gráficas dinámicas, como una alternativa de solución a los problemas presentados a nivel precálculo de éste concepto. Posteriormente fue puesta en escena en MOODLE, acrónimo de Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment (Entorno de Aprendizaje Dinámico Modular Orientado a Objetos) lo que favoreció la interacción entre profesores y alumnos, así como el desarrollo de las actividades y las retroalimentaciones generadas entre los profesores y los alumnos participantes: Para el desarrollo de la actividad, se utilizaron simultáneamente los registros semióticos Algebraico, Numérico, Gráfico y Escrito, como una estrategia que permita al alumno concentrarse en el desarrollo de la actividad propuesta, demostrando al final una clara similitud de resultados obtenidos entre los alumnos de un sistema tradicional y los del sistema elegido.*

**Palabras clave:** límites, educación a distancia

### Introducción

El diseño, manejo y capacitación en los sistemas de educación a distancia deben formar parte de una estrategia global de enseñanza - aprendizaje, que incluya de manera categórica la tarea del profesor, cuya actividad sigue siendo básica, ya que es quien va marcando los ritmos del aprendizaje, quien resalta las ideas esenciales o estrategias interesantes y en definitiva, quien tiene la responsabilidad de organizar y dirigir la interacción del estudiante con la computadora.

Un desarrollo personalizado de estos programas permite un aprendizaje más activo que hace posible la experimentación y exploración de nuevas estrategias a la hora de resolver problemas. De este modo, muchos de los conceptos enseñados en el área de Cálculo Diferencial e Integral pierden un tanto su carácter abstracto, proporcionando una experiencia que clarifica dichas nociones.

### Objetivos

El objetivo General de ésta investigación es el de analizar si es viable la reproducibilidad de la Ingeniería Didáctica originalmente aplicada en un sistema didáctico tradicional (Cruz, 2006) al ser

1681

implementada en MOODLE, sustentándonos en los resultados sobre reproducibilidad de situaciones didácticas (Lezama, 2003), con la intención de que los resultados obtenidos durante el proceso sirvieran como insumo de datos de investigación del proyecto planteado y a la vez, consiguieran validar las situaciones didácticas aplicadas.

Los objetivos particulares son:

- 1.- Modificar la concepción de asíntotas utilizadas en el proceso de análisis de una gráfica.
- 2.- Lograr la significación de las asíntotas como una noción a nivel precalculo del límite.
- 3.- Predecir a través de las asíntotas, los límites de la curva analizada.

### **La teoría de situaciones didácticas como marco teorico**

Indica la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) que la situación debe ser fuente de aprendizaje y en ciertas ocasiones también criterio de validación de las estrategias puestas en juego. En éste caso, los profesores participantes, analizaron, diseñaron y propusieron a los alumnos situaciones con las que ellos se puedan comprometer y aceptar la responsabilidad de resolver el problema.

En nuestro modelo propuesto y desarrollado, partimos de conocimientos matemáticos que el alumno ya maneja con soltura, pero apartándose de ellos lo suficiente como para que no le permitan dar una respuesta inmediata a los problemas propuestos. A su vez, estos problemas deben ser lo suficientemente cercanos a los conceptos puestos en juego, como para que pueda realizar acciones sobre los objetos de conocimiento propuestos y donde llegue un momento en el que se evidencie la ineficacia de los mismos para resolver el problema planteado.

Las situaciones planteadas tiene por objeto que el alumno interactúe con el saber, es decir, que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que le sean útiles (Lezama, 1999).

### La ingeniería didáctica como metodología

Con el objetivo de que la Ingeniería Didáctica diseñada (Artigue, 1995; Farfán, 1997) considere la reproducibilidad y sea aplicable en un sistema didáctico diferente para el que originalmente fue planteada, nos sustentamos en los resultados que sobre reproducibilidad de situaciones didácticas plantea Lezama (2003), y para su desarrollo consideramos e integramos en su diseño estos tres campos de acción.

- 1.- Estructura de la ingeniería didáctica.
- 2.- Comunicación del escenario.
- 3.- Adaptación al nuevo sistema didáctico.

Esta modelación fue inicialmente analizada, diseñada y aplicada por cinco profesores de Cálculo Diferencial e Integral del Nivel Medio Superior. Esto, con la intención de que los resultados obtenidos durante el proceso, fueran aplicados en diferentes sistemas didácticos, cada uno con su propia metodología y programas de estudio, a manera de validación de las situaciones didácticas aplicadas y como insumo de datos de investigación del proyecto planteado.

Tanto la propuesta como el diseño de los problemas fue desarrollada por los profesores en el Sistema E+ (Cruz, 2005), haciendo mención que los pizarrones virtuales utilizan el *applet* Descartes (2008), programados desde el Sistema E+ para su funcionamiento y aplicándose en su fase inicial a 6 alumnos en un salón de clase tradicional (Cruz, 2006). Posteriormente, se desarrollo una planeación de actividades dentro del sistema MOODLE, instalado en el *site* de Internet <http://www.mateuag.sistemae.net> en donde se aplicó una página de trabajo diseñada ex profeso y se monitorizo y asesoró en línea durante dos sesiones a 30 estudiantes del tercer grado de preparatoria, 15 del primer año de las carrera de Ingeniería en Redes, 15 de Ingeniería de Computación y 20 de la Licenciatura en Informática, residiendo los estudiantes en cualquiera de las siguientes poblaciones: Chilpancingo, Acapulco y Teloloapan, Guerrero, México, quienes accesaron al citado *site* desde su lugar de origen.

La entrega de resultados por parte de los alumnos fue mediante el envío de la página de trabajo contestada en Word o en el editor de texto de MOODLE. El posterior análisis se confrontó mediante las visiones de conjunto con los resultados obtenidos en la clase tradicional y los obtenidos en las sesiones de MOODLE

La secuencia original antes de la adaptación al nuevo sistema didáctico en donde finalmente se aplicó, es resultado del análisis de cerca de 70 ejercicios propuestos por los mismos profesores, los cuales se fueron depurando para llegar a seis ejercicios. Éstos fueron resueltos por los profesores antes de aplicarlos a los estudiantes, dejando finalmente tres más para terminar, que son los que se presentan a continuación:

### Problema no. 1

Analizar la curva  $y = \frac{x}{x^2 - 5^x + 4}$  (véase la Figura 1)

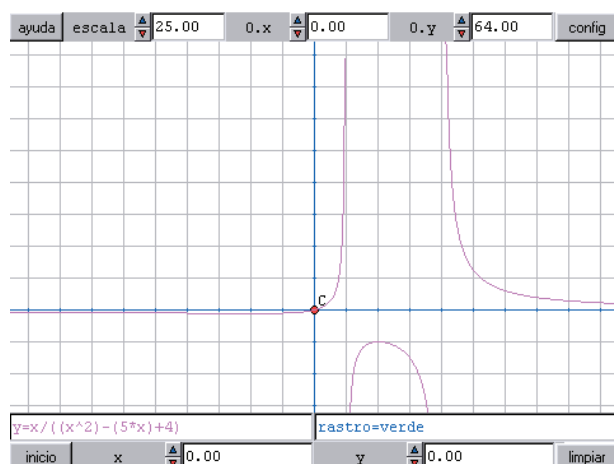


Figura 1.- Gráfica con asíntotas.

Observaremos si los estudiantes son capaces de indicar si los valores encontrados mediante ésta situación son los límites unilaterales existentes en las asíntotas.

Los límites analizados en el dominio de la curva, son:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 5^x + 4} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 5^x + 4} = 0$$

Además de analizar los límites unilaterales cuando  $x \rightarrow 1$  y  $x \rightarrow 4$  ya que no tienden hacia el mismo valor, por lo que se observará cual es la idea que los estudiantes tienen al analizar éstos valores.

**Problema no. 2**

Analizar la curva  $y = \frac{5x^3 + 2}{3x^2}$

Esta curva tiene dos asíntotas, la recta  $y = \frac{5}{3}x$  y la asíntota vertical  $X=0$ . Se propone el análisis de ésta curva porque cuando  $x \rightarrow 0$ , el límite de  $y$  tanto por el lado izquierdo como por el derecho tiende al infinito, lo que nos permitirá observar como caracterizan los estudiantes el comportamiento de la curva y ver si pueden predecir éstos límites. Así mismo se les pide encontrar

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x^3 + 2}{3x^2}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2}{3x^2}$  (véase la Figura 2)

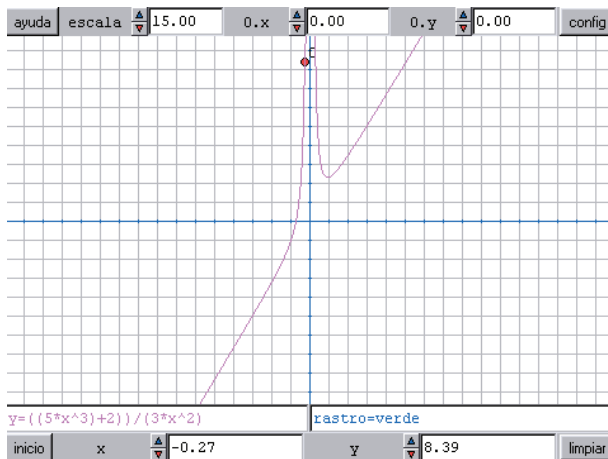


Figura 2.- Gráfica con asíntotas izquierda y derecha positivas.

Se pretende observar si al factorizar la ecuación, los factores resultantes pueden proveer de información sobre los límites de la curva y observar cual es la idea que sobre éste comportamiento de la curva tienen.

**Problema no. 3**

Analizar la curva  $y = \frac{1 - x^3}{x}$  (véase la Figura 3). Esta curva tiene dos asíntotas, la recta vertical  $X=0$

y la parábola  $y = -x^2$ ; se les pide analizar el valor del límite cuando  $x \rightarrow 0$  por la derecha y cuando tiende a  $\infty$ , así como el valor del límite cuando  $x \rightarrow 0$  por la izquierda y tiende a  $-\infty$ , como podemos

observar en la figura, cuando  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^3}{x}$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x^3}{x}$  la curva sigue asintóticamente a la parábola

$$y = -x^2$$

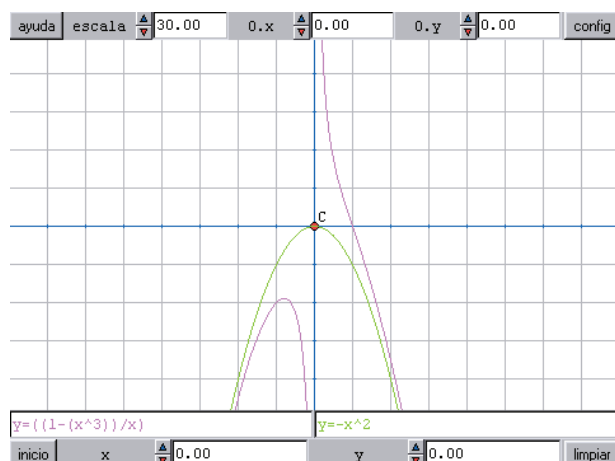


Figura 5.- Gráfica con asíntota curva

### El trabajo dinámico sincronizado en los registros tabular, gráfico y algebraico en moodle

Duval (1995) subraya la existencia de diversos sistemas de registros semióticos de representación ligados a un mismo objeto matemático. Clasifica éstas relaciones como internas y externas, entendiendo por externas aquellas que son visibles y observables públicamente y por internas, las privadas que no la son. Duval considera que las representaciones externas son por naturaleza semióticas, ya que se producen mediante un sistema de signos y son accesibles a todos los sujetos capaces de interpretar este sistema.

Tradicionalmente, los estudiantes han encontrado en la graficación punto a punto una manera de llegar a la respuesta correcta, eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica. El registro tabular utilizado como registro de partida puede resultar incompleto ya que no alcanza a cubrir todos los puntos necesarios para analizar una gráfica. Esto puede ser un indicador de por que los registros gráficos y tabulares separados, son mas un problema que una solución.

Las conversiones entre los registros gráfico y tabular no existen con el uso de un pizarrón virtual, ya que los registros se trabajan sincronizados al mismo tiempo; la manipulación por parte del alumno del punto que se quiere analizar, puede resolver el problema de las actividades de conversión por parte del estudiante, ya que dejan de ser mecánicos y tediosos y le permite concentrarse en el análisis de lo que está observando.

Obviamente, sin una herramienta afinada y diseñada expresamente para cumplir un objetivo específico, enfocada en las diversas áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como para su uso como instrumentos útiles para el análisis, la integración de los registros no tendría razón de ser.

En Cruz (2006), se consigna que al interior del aula tradicional, los usos y costumbres para la enseñanza de la idea de límite, restringen la profundización en el desarrollo de éste concepto. Del análisis de la forma en como es enseñado el concepto de límite en el entorno escolar tradicional, existe la posibilidad que los profesores presenten limitaciones en la interpretación del concepto de límite o bien no profundicen en el desarrollo de éste tema. Es posible que reproduzcan en los alumnos los mismos problemas que ellos tienen en sus concepciones, lo que puede perjudicar la actuación de los estudiantes en los temas subsecuentes al desarrollo de la concepción de límite.

Específicamente para el caso de los límites propuestos en éste trabajo, todos tiene como resultado una indeterminación del tipo  $\frac{0}{0}$  o  $\frac{\infty}{\infty}$ , indeterminaciones que al interior del aula, son resueltas por la Regla de L'Hospital, regla que involucra el uso de derivadas para obtener el resultado buscado. El problema es que las derivadas son un tema que se estudia en el currículum escolar después de el de límites, por lo que los estudiantes se ven obligados a utilizar elementos que aún no conocen, lo que tiene como resultado confusiones y análisis erróneos por parte de ellos.

Con la presente propuesta y basándose en elementos de precalculo y en conceptos que el estudiante ya tiene aprendidos por los cursos anteriores, se obtienen los mismos resultados que con un análisis de tipo puramente algebraico. Esto incide directamente en el desarrollo del estudiante, ya que le permite el perfeccionamiento de nuevas ideas para el análisis de límite y mucho mas aún, de encontrar la forma de comprobar su existencia y desarrollar la intuición para resolverlo.

El uso de MOODLE y su entorno basado en un ambiente con conexión a Internet, permitió la planeación, aplicación, seguimiento y análisis de los resultados obtenidos en este trabajo. La argumentación resultante de la interacción entre alumnos y profesores, comparada con el resultado obtenido en la aplicación en un aula tradicional, favoreció y permitió desarrollar otras alternativas de enseñanza-aprendizaje además de la puramente algebraica. Esto permitió, tanto a los profesores participantes como a los alumnos, una búsqueda de opciones que en un aula tradicional no hubiera sido posible conseguir. La posterior socialización de los elementos encontrados, favoreció la discusión y análisis de las opciones presentadas por los alumnos en un tema en el que aún no se han agotado las estrategias de enseñanza-aprendizaje.

### Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gomez (Ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. (pp. 33 – 61). México D. F. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7 (2), 33- 115.

Cruz J. (2005). Sistema para la gestión, evaluación y administración de e-learning para la enseñanza de las matemáticas (Sistema E+). En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 18 (pp. 259-264). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Cruz J. (2006). *Diversas concepciones de asíntotas como elementos didácticos en la conceptualización del límite a nivel precálculo*. Tesis de Maestría no publicada. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero.

Descartes (2008). *Applet Descartes*. Extraído el 10 de Enero de 2008 desde <http://www.isftic.mepsyd.es/w3/Dcartes/index.html>

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna. Suiza: Peter Lang S.A.

Farfán R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México, D. F. México: Grupo Editorial Iberoamérica.



Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de Doctorado no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional.