

APRENDER MATEMÁTICA, HACIENDO MATEMÁTICA: ACTIVIDADES DE MODELACIÓN CON GEOMETRÍA DINÁMICA

Ángel Homero Flores Samaniego

Colegio de Ciencias y Humanidades, Universidad Nacional Autónoma de México México

ahfs@servidor.unam.mx

Campo de investigación: Modelación Matemática

Nivel: Medio

Resumen. *Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza que se ha venido desarrollando desde hace algunos años, principalmente en el nivel Medio Superior. La filosofía en la que se sustenta el modelo es la de una Educación Centrada en el Estudiante en la cual se fomenta un medio ambiente de enseñanza y aprendizaje de convivencia armónica entre los participantes en el proceso. En este contexto, las actividades de modelación matemática como un medio para aprender matemática han sido de gran utilidad en el desarrollo del conocimiento, no sólo matemático, de los estudiantes. Por su parte, el uso de programas de Matemática Dinámica como The Geometer's Sketchpad (2003) ha facilitado la construcción de modelos matemáticos, y ha servido para ampliar la gama de conocimientos del estudiante. En el presente artículo se presenta una actividad de modelación matemática para alumnos de bachillerato dentro del modelo de enseñanza.*

Palabras clave: modelación matemática, sketchpad, educación centrada en el estudiante.

Introducción

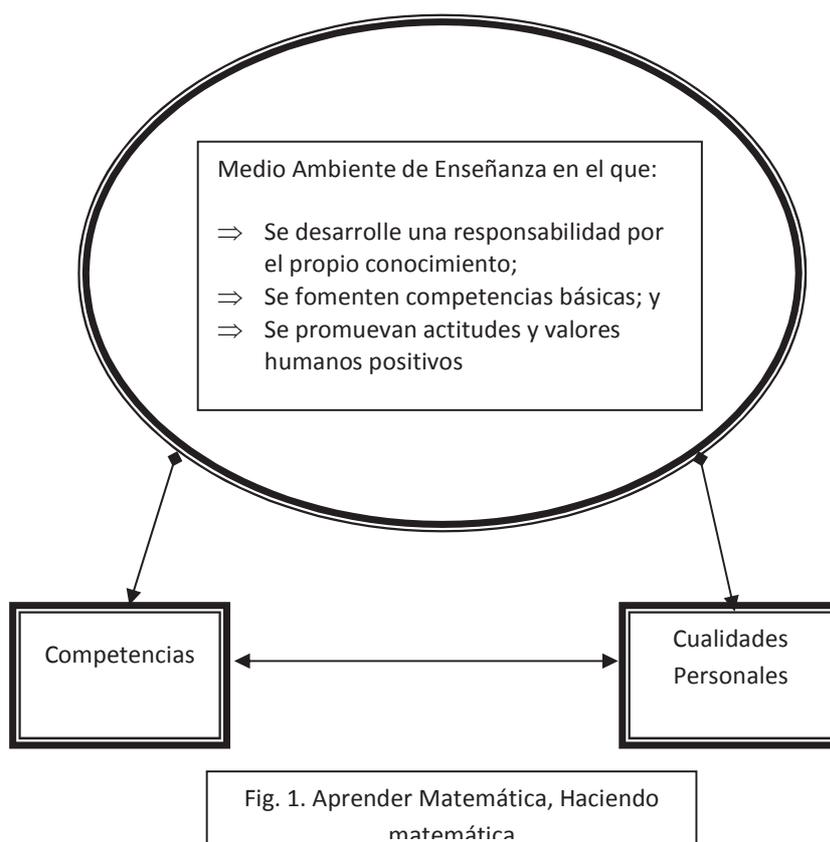
Aprender Matemática, Haciendo Matemática es un modelo de enseñanza centrado en el estudiante (Flores 2006; 2007 a, b; 2008) que tiene como objetivo fomentar en los estudiantes competencias matemáticas, como el desarrollo de un pensamiento matemático y la capacidad de resolver problemas; y el fomento de cualidades personales, como una actitud positiva hacia el quehacer matemático y el desarrollo de valores como la tolerancia, el respeto y la cooperación.

En la educación centrada en el estudiante se pone énfasis en la comprensión del profesor; la autoconciencia; actividades iniciadas y reguladas por el estudiante; y el fomento de un pensamiento crítico. Se fundamenta en cuatro dominios: metacognitivo y cognitivo; afectivo y emocional; factores de desarrollo y sociales; y factores de diferencias individuales (Cornelius-White, 2007).

El modelo de enseñanza tiene como objetivo principal fomentar en los estudiantes (Gómez y Flores 2009) los siguientes aspectos:

- Un pensamiento matemático que le permite reconocer patrones y generalizar; justificar resultados mediante argumentos matemáticos; y utilizar las representaciones de un mismo objeto matemático.
- Habilidades de resolución de problemas que le permiten usar su pensamiento matemático para plantear y resolver problemas dentro y fuera del ámbito matemático.
- Competencia en el uso de tecnología que le permite utilizar las tecnologías que tiene a su alcance para facilitar la resolución de problemas y la adquisición de su conocimiento.
- Actitudes positivas hacia las tareas matemáticas que le permiten plantear problemas y argumentar su resolución como una responsabilidad propia que redundará en su beneficio y en beneficio de los demás.
- Valores humanos que le permitan una mejor convivencia con sus semejantes y el ambiente que le rodea.

Estos cinco elementos están divididos en Competencias y Cualidades Personales; en el modelo se propone un Medio Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje (que se define como todo aquello que interviene en el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, desde el aula y su mobiliario, hasta los materiales y la metodología de enseñanza) en el que se desarrolle una



responsabilidad por la adquisición del propio conocimiento y el de los demás; se fomenten competencias básicas; y se promuevan actitudes y valores humanos positivos que permitan una convivencia armónica dentro del aula (Figura 1, tomada de Gómez y Flores, 2009).

En la categoría de Competencias se incluyen los tres primeros aspectos del Modelo: pensamiento matemático, resolución de problemas y tecnología; mientras que en Cualidades incluimos los dos restantes: actitudes positivas hacia el trabajo matemático y valores humanos positivos.

Modelación matemática y uso de software dinámico

Uno de los aspectos metodológicos del modelo de enseñanza es el uso de la modelación matemática como vehículo para fomentar las competencias matemáticas antes mencionadas. Cabe destacar que no se trata de enseñar modelación matemática a los estudiantes, sino que se trata de utilizar el proceso de creación de modelos para que el estudiante aplique su conocimiento previo (matemático o no) y aprenda los conceptos matemáticos propuestos en el currículo.

En particular, el uso de ecuaciones paramétricas es de gran utilidad para el aprendizaje de funciones y la comprensión del concepto de variable; esto se ve potenciado con el uso del paquete de Geometría Dinámica, *The Geometer's Sketchpad*, que permite la utilización dinámica de los parámetros.

Como ejemplo de lo anterior tenemos el siguiente problema, presentado en Relme 22 como parte del curso corto que dio origen al presente artículo:

Las bases de un campo de beisbol forman un cuadrado de 28 metros de lado. Patricia está en primera base y decide robarse la segunda. Empieza a separarse de la primera base poco a poco. Cuando está a tres metros de la primera decide correr a la segunda. 1.5 segundos después de iniciada su carrera, el catcher lanza la bola desde home a la segunda base. Si Patricia corre a 8 m/s y el catcher lanza la bola a 38 m/s, ¿llegará Patricia primero que la bola a la segunda base? Construye un modelo con Sketchpad que reproduzca la situación.

Para resolver el problema se hace la suposición de que la trayectoria de la bola es lineal. Las ecuaciones de movimiento de Patricia y de la bola son las siguientes:

$$(1) \quad P = 8t$$

y

$$(2) \quad b = 38(t - 1.5)$$

Patricia tiene que recorrer 25 metros hasta la segunda base, mientras que la distancia que recorre la bola es de $28\sqrt{2} = 39.598$ metros.

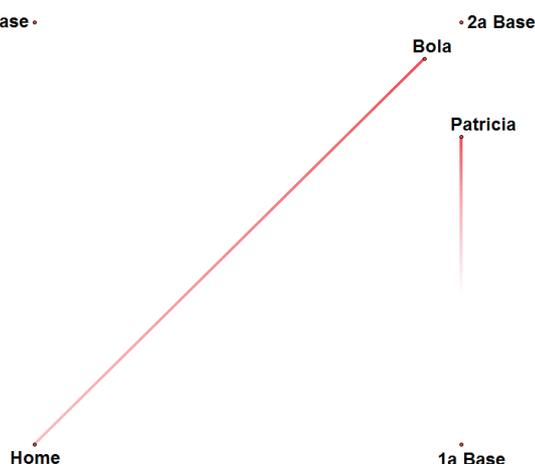


Figura 2

Con estas distancias, el tiempo que tarda Patricia en llegar a la base es de 3.125 s y el tiempo que tarda la bola es de 2.542 s. Por lo que la bola llega primero.

Ahora bien, con *Sketchpad* es posible construir parámetros cuyo valor no es fijo, a manera de una variable. En la Figura 2 se muestra la simulación que se hizo con *Sketchpad*. Para hacer la construcción, primero se definió un parámetro t cuyo dominio de variación es $[0, 3.125]$ y con él se calculó las distancias recorridas utilizando las ecuaciones (1) y (2). El valor de t que da el programa, por omisión, es $t = 1$, por lo que se obtuvieron los valores $P = 8$ y $b = -19$. Al variar el parámetro de 0 a 3.125 las distancias varían de la siguiente manera:

$$P : [0, 28] \text{ y } b : [-19, 61.75]$$

Se hace necesario, entonces, restringir el movimiento de la bola al intervalo $[0, 2.542]$

Para ello utilizamos la función signo, incorporada al programa y que se define de la siguiente manera:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos el valor de b por los factores:

$$\left(\frac{1-\operatorname{sgn}(t)}{2}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1-\operatorname{sgn}(t-2.542)}{2}\right)$$

los valores de b se limitan al intervalo $[0, 2.542]$.

Ahora bien, si colocamos el campo de beisbol en un sistema de coordenadas con Home en el origen, las bases quedan en los puntos $(28, 0)$, para la primera; $(28, 28)$ para la segunda; y $(0, 28)$ para la tercera.

Esto nos indica que Patricia correrá siguiendo un línea recta cuya ecuación es $x = 28$; mientras que la bola seguirá la recta cuya ecuación es $y = x$.

Para simular lo anterior, calculamos un valor fijo 28 con la calculadora del programa y reproducimos el valor de b (con la instrucción copiar y pegar).

Con estos valores definimos los puntos $(28, P)$ y (b, b) para la posición de Patricia y la bola. Al cambiar el valor del parámetro t , se actualizan los valores de P y b , y los puntos en la gráfica cambian de posición. Para hacer que Patricia empezara a correr 3 metros más adelante de la primera base, simplemente se suma 3 al valor $8t$ que da su posición.

Si se activa el rastro de lo puntos *Patricia* y *Bola* y después se anima el parámetro, se tendrá la situación que se muestra en la Figura 2. En ésta las posiciones de Patricia y la Bola corresponden a un tiempo de 2.17 segundos y se aprecia claramente que la bola llegará antes que la corredora.

Consideraciones finales

Resolver el problema planteado mediante las ecuaciones de movimiento parece ser no muy complicado para estudiantes de un primer curso de álgebra de bachillerato. Pero la construcción del modelo y la simulación del campo de beisbol con *Sketchpad* implica poner en juego un conocimiento matemático mucho más amplio que el mero planteamiento de ecuaciones y su resolución para determinados valores.

Además del dominio del programa, se requiere cierto conocimiento de geometría analítica como la ubicación de puntos en un sistema de coordenadas y el concepto de recta. En particular la forma de la ecuación de una recta paralela a uno de los ejes coordenados.

El uso de parámetros que se pueden animar y cuyo dominio se puede manipular ha resultado de bastante utilidad en la comprensión del concepto de variable por parte de los estudiantes y, por ende, del concepto de dominio y función.

Como comentario al margen, el uso de la función signo para restringir el movimiento de los puntos no siempre resulta claro para los alumnos de bachillerato y, curiosamente, tampoco para muchos de los profesores de secundaria y bachillerato con los cuales se ha trabajado esta actividad.

Finalmente, utilizar actividades como la presentada en un medio ambiente en donde el estudiante es quien hace la matemática y el profesor se limita a fungir como guía, a resultado positivo en la construcción de un Medio Ambiente de Enseñanza-Aprendizaje en donde se puede aprender matemática, haciendo matemática.

Referencias bibliográficas

Cornelius-White, J. (2007). Learner-Centered Teacher-Student Relationship are effective: a Meta Analysis, *Review of Educational Research*, 77 (1), 113-114.

Flores, H. (2006). Učiti se matematiko-delati matematiko (Aprender matemática-haciendo matemática). *Revista Matematika v Šoli*, 12(3) y 12(4).

Flores, H. (2007a). Aprender Matemática, Haciendo Matemática, *Acta Scientiae*, 9 (1), 28-40. Revista de la Universidad Luterana de Brasil

Flores, H. (2007b). *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: Uso de la Geometría Dinámica*, Taller impartido a profesores de ingeniería., Centro Universitario de Occidente, División de Ciencias de la Ingeniería. Quetzaltenango, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala.

Flores, H. (2008) *Learning Mathematics, Doing Mathematics: creativity in classroom?* Grupo de Discusión, Promoting Creativity for all Students in Mathematics Education, 11th International Conference on Mathematical Education, Monterrey México.

Gomez, A. y Flores, H. (2009) *Aprender Matemática, Haciendo Matemática: la evaluación en el aula*. Artículo presentado en la Revista Educación Matemática, para publicación.

The Geometer's Sketchpad v. 4.0, paquete de Geometría Dinámica. (2003), Emeryville, CA: Key Curriculum Press.