

DESCRIPCIÓN BIBLIOGRÁFICA DE FUNCIONES TRASCENDENTES Y SU APLICACIÓN EN LAS CIENCIAS BIOLÓGICAS

Dal Bianco, Nydia-Botta Gioda, Rosana-Castro, Nora-Martinez, Silvia-Prieto, Fabio
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar - smartinez@exactas.unlpam.edu.ar
Campo de investigación: Pensamiento matemático avanzado; Nivel educativo: Superior

RESUMEN:

Es de fundamental importancia para el desarrollo de las capacidades de los estudiantes, incentivarlos en el hábito de la lectura comprensiva y orientarlos en las correspondientes consultas bibliográficas a fin de que afiancen sus conocimientos.

Nuestro objetivo estuvo centrado en conocer el tratamiento de las funciones logarítmicas y exponenciales en bibliografía de los niveles Polimodal y Universitario, desde su presentación, la utilización de los diferentes registros y la respectiva conversión de los mismos, hasta los ejemplos y ejercicios de aplicación que se encuentran en ellos.

Haciendo una selección precisa de textos de uno u otro nivel y orientando a los alumnos en la elección de los mismos, encontrarán un complemento significativo de las clases teóricas-prácticas del tema que les facilitará su aprendizaje y posterior aplicación.

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente Biología y Matemática están desconectadas, incluso dentro de la Universidad, no obstante la mayoría de los biólogos están de acuerdo en que la Matemática puede ser y frecuentemente lo es, una gran ayuda para ellos, en particular en algunas ramas de la Biología.

En la actualidad, todas las ciencias tratan de expresar ciertas características de los fenómenos que estudian en función de otras; y cuanto más cuantitativo y medible matemáticamente sea ese estudio, más fructífero resultará.

Las funciones son una herramienta útil para describir, analizar e interpretar situaciones provenientes de la Matemática y otras ciencias como la Biología.

Los alumnos que cursan carreras de Ciencias Biológicas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, presentan reiteradas dificultades en la comprensión y/o aplicación de algunos temas de matemática, en particular en el tratamiento de funciones.

Se ha trabajado con los alumnos durante la cursada de la asignatura Matemática aplicando diferentes estrategias de aprendizaje, en esta oportunidad y anticipándonos al ingreso del estudiante, analizamos la Bibliografía utilizada en los distintos colegios de Polimodal de nuestra ciudad y también algunos textos considerados básicos en la cátedra, específicamente en las *funciones logarítmicas y exponenciales*. Esta propuesta se concretó a fin de conocer el desarrollo y presentación de estos temas en la bibliografía de consulta a fin de que, complementando las clases teórico-prácticas de la asignatura, faciliten la comprensión y aprendizaje por parte de los estudiantes.

Marco Teórico

En el aprendizaje de la Matemática, la adquisición de un concepto depende en gran parte de la capacidad para reconocer e interpretar una representación del mismo. En esto juega un papel importante el lenguaje utilizado. En particular en el tratamiento del tema funciones, y partiendo del concepto de función como expresión de una dependencia entre variables, consideramos fundamentales los siguientes registros de representación (Duval-1998):

- *Registro simbólico*: Cuando se da la definición de una función mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal.
- *Registro analítico*: Cuando hacemos referencia a la definición de función mediante una expresión algebraica.
- *Registro verbal*: En este caso, el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones llamadas del mundo real. Estas pueden ser modeladas en cualquiera de los otros registros.
- *Registro tabular*: Corresponde a los valores numéricos de la función organizados en tablas de valores. Dados valores específicos para x determinar los correspondientes valores de y organizados en una tabla.
- *Registro conjuntista*: Corresponde a la representación de función mediante un conjunto de pares ordenados, donde ninguno de estos tienen la primera componente igual.
- *Registro figural*: Cuando expresamos el concepto de función, mediante los llamados diagramas de Venn. En este caso, el alumno reconoce una función como aquella donde a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un solo elemento en el conjunto de llegada.
- *Registro gráfico*: Es la representación en el plano cartesiano.

La conceptualización de un objeto matemático no puede ser sólo la automatización de ciertos tratamientos o la comprensión de nociones, sino que implica una coordinación de registros de representación. Esta coordinación de registros es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones.

Desarrollo

De la bibliografía de Matemática utilizada en los colegios del Nivel Polimodal en la provincia de La Pampa, así como de la propuesta en la asignatura para los alumnos de las carreras de Ciencias Biológicas, seleccionamos para su análisis cuatro textos.

Nivel Polimodal

- Matemática I. Autores: M. B. Camuyrano, G. Net, M. Aragón. Capítulo 5: Funciones exponenciales y logarítmicas.
- Matemática 2. Autores: A. Berio, M.L. Colombo, C. D'Albano, O. Sardella. Tramo C: Función logarítmica y exponencial.

Nivel Universitario:

- Cálculo. Volumen 1. Autores: R. Larson, R. Hostetler, B. Edwards. Capítulo 7: Funciones exponenciales y logarítmicas.

- Cálculo trascendentes tempranas. Autor: J. Stewart. Capítulo 2: Tipo de Funciones; desplazamiento y escalamiento. Capítulo 3: Funciones inversas: Funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas inversas.

Descripción de la bibliografía del Nivel Polimodal:

- En el capítulo 5 de **Matemática I** se introduce el tema de la *función exponencial* como modelo con la presentación de dos situaciones particulares: “la fisión nuclear” y la correspondiente a “carbono 14”, anexando al final del desarrollo de cada una la ejercitación específica.

Posteriormente se presenta la fórmula de la *función exponencial* en forma general y la deducción de las expresiones correspondientes a cada uno de los modelos de las situaciones antes mencionadas.

Continúan los autores de este texto con una síntesis de las propiedades de las potencias de exponente real y prosiguen con los gráficos de funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x$, con $a > 1$ y con $0 < a < 1$. En uno de los ejercicios de gráficas se analizan simetrías entre curvas.

En el mismo capítulo se describen y caracterizan los crecimientos exponenciales presentes en distintas situaciones y se incluyen ejercicios de características semejantes. Al finalizar el tratamiento de esta función y a partir de una situación problemática se efectúa el análisis de la exponencial de base e considerando casos importantes.

Titulando “*La función logarítmica como modelo*” y dentro del desarrollo de la situación “cálculos relacionados con la fisión nuclear” define la función logarítmica de base mayor que 1 como inversa de la exponencial. Para destacar la simetría se las grafica en un mismo sistema de coordenadas cartesianas conjuntamente con la función identidad. A partir de otra situación y en forma similar caracteriza a la función logarítmica de base menor que 1.

Posteriormente los autores definen la operación logaritmo, enunciando las propiedades sin demostración y mostrando ejemplos. Retomando el tema funciones logarítmicas en las bases mencionadas anteriormente, se analizan dominios, imágenes y/o intervalos de monotonía, concluyendo con la simetría entre las correspondientes gráficas respecto de la función identidad.

En las actividades de síntesis se presenta una variada ejercitación de la que destacamos las vinculadas a crecimientos poblacionales, PH de soluciones e intensidad del sonido entre otras.

- En el texto **Matemática 2** el tramo C: “*Función logarítmica y exponencial*”, desarrolla en primer lugar la función exponencial definiéndola en forma general y mostrando gráficamente las variaciones de la curva para distintos valores de la base. Inmediatamente aparecen representadas otras funciones en las que se cambian valores de los parámetros para indicar “corrimientos” sobre los respectivos ejes acompañada con una breve ejercitación. En la que se destaca el trabajo con los registros tabular y gráfico. Previo al tratamiento de la función logarítmica, en el texto se define la logaritmación y sus operaciones aplicando las propiedades correspondientes, sin ser demostradas, y con ejemplos desarrollados. La ejercitación propuesta es de características similares.

En la siguiente sección define la función logarítmica como inversa de la exponencial y grafica las dos funciones considerando la base 2, utilizando tabla de valores para la

logarítmica. Inmediatamente muestra la función logaritmo natural a partir de su tabla y gráfico y finaliza esta sección teórica con un ejemplo correspondiente a un corrimiento sobre el eje de las abscisas. En la ejercitación propuesta se solicita al lector construcción de gráficos de funciones exponenciales y logarítmicas con variación de los distintos parámetros y en la última parte se presentan dos ejercicios de aplicación a la Biología.

Descripción de la bibliografía del Nivel Universitario:

En el capítulo “Repaso y preámbulo” del texto: **Cálculo** de Stewart, hay una breve síntesis sobre ambas funciones. En los capítulos siguientes (1 y 2) se desarrollan los temas correspondientes a límites y derivadas en forma general. En el capítulo 3 aparecen las funciones de interés para nuestro trabajo. A continuación transcribimos parte del párrafo inicial:

“Dos de las funciones más importantes que se manejan en las matemáticas y en sus aplicaciones son la función exponencial $f(x) = a^x$ y su inversa, la función logarítmica $g(x) = \log_a x$. En este capítulo investigaremos sus propiedades, calcularemos sus derivadas y las emplearemos para describir el crecimiento y decaimiento exponencial, en campos como la química, la física, la biología y la economía.”

Iniciando el capítulo 3 se muestra la forma (como dice el autor) de la función exponencial para continuar con las propiedades de los exponentes a partir de los gráficos de las funciones $y = 2^x$ e $y = x^2$ comparando la monotonía de ambas.

En un teorema en forma de resumen aparecen las propiedades de la función exponencial. Mediante ejemplos se calculan límites y derivadas de estas funciones.

Continúa con un ejemplo de aplicación referido al crecimiento de una población de bacterias. En la ejercitación propuesta para esta sección se presentan ejercicios referidos a construcción de gráficos y cálculo utilizando la calculadora y algunos problemas de aplicación.

Siguiendo prácticamente los mismos lineamientos utilizados en el tratamiento de la función exponencial, en la sección siguiente, y a partir del concepto de función inversa, el autor define la función logarítmica con ejemplos de crecimiento y decaimiento exponencial de los que destacamos los referidos a crecimiento de una población de bacterias y desintegración radiactiva. Finaliza con una variedad de problemas de aplicación que involucran a los temas antes mencionados.

En el capítulo VII del texto: **Cálculo y Geometría Analítica** de Larson estas funciones particulares son abordadas después de un amplio estudio de las funciones elementales y luego de haber desarrollado los conceptos de límite, continuidad, derivación e integración de funciones.

Se presenta la función exponencial $f(x) = 2^x$ calculando algunos valores particulares y realizando el tratamiento con exponentes irracionales.

Se enuncian las propiedades de los exponentes en un Teorema (sin demostración) ejemplificando algunas de ellas. Posteriormente, utilizando tablas de valores, se construyen las gráficas de algunas funciones exponenciales (distintas bases) y se analiza su comportamiento. Las características generales se enuncian formalmente como propiedades de las funciones exponenciales.

Después de definir el número e y la función exponencial en esta base se presentan sus primeras aplicaciones con dos ejemplos, uno de ellos vinculado a la Biología trata el crecimiento de un cultivo de bacterias. Aparecen en la ejercitación de esta sección varios problemas de interés para nuestro trabajo.

El autor continúa con el tratamiento de los conceptos derivación e integración de funciones exponenciales sin mostrar aplicaciones específicas.

En la sección siguiente se estudian las funciones inversas, su existencia y derivada, enunciando y demostrando teoremas relativos a esta temática.

Prosigue con el tratamiento de las funciones logarítmicas: definición y propiedades de la función logaritmo natural, enunciando en un teorema las propiedades de los logaritmos.

En las dos secciones posteriores se aplican la derivación e integración a las funciones logarítmicas, mostrando al final un problema aplicado a las leyes de los gases similar a la ejercitación propuesta y luego se trata el tema “crecimiento y decrecimiento exponenciales” y sus aplicaciones de las que destacamos: Desintegración radiactiva; Crecimiento de población y Ley de enfriamiento de Newton. Concluye con una propuesta interesante de problemas aplicados al campo de investigación en Biología .

El Capítulo VII finaliza con una serie de ejercicios y problemas que aplican los temas desarrollados e introducen algunos conceptos nuevos como la función densidad exponencial entre otros.

Análisis de la Bibliografía:

Existen diferencias en el tratamiento del tema que nos convoca en los dos textos del nivel Polimodal. Lo que requiere una especial atención es la actividad introductoria, ya que esta es de relevante importancia debido a que a partir de ella el alumno puede construir el sentido del conocimiento.

Los textos consultados presentan distintos enfoques en el estudio del tema funciones exponenciales y logarítmicas. En Matemática I se muestran algunas aplicaciones antes de definir el objeto de estudio, el que se construye progresivamente (en forma similar como ha evolucionado históricamente el concepto de función) analizando la dependencia entre las variables. Esta forma de introducción al tema de las funciones analizadas a partir de situaciones reales, externas a la Matemática, y mediante una interacción entre los distintos registros: tabular, gráfico y analítico permite una mayor comprensión del concepto estudiado.

En el texto Matemática 2 se introduce la función exponencial como un instrumento. Se la define con la fórmula general y su gráfica sin tener en cuenta la relación entre las variables. En este contexto la utilización de la función no está ligada a una situación - problema con la que tendría sentido la definición del objeto.

El autor trabaja principalmente con la conversión del registro analítico - gráfico y viceversa y en unos pocos ejemplos se relacionan los registros : analítico – tabular-gráfico y verbal-analítico.

Siguiendo con la teoría de Duval consideramos que la articulación entre al menos dos registros favorece la comprensión del concepto.

En cuanto a los autores de los textos de Cálculo presentan en general similares enfoques, por ejemplo ambos enuncian en Teoremas las propiedades de las funciones y hasta existe

coincidencia en algunos ejemplos como el considerar base 2 para representar ambas funciones en sistema de ejes cartesianos. En los dos libros analizados en una sección especial se trabaja el tema de las funciones inversas, con una mayor complejidad en el tratamiento del texto Cálculo de Stewart como así también en los ejercicios propuestos. También se observa en el desarrollo de los temas estudiados un tratamiento similar respecto a la construcción del objeto de estudio en cuanto a la utilización de los diferentes registros (analítico, tabular, gráfico, verbal) y sus respectivas interacciones. Esto favorece la transferencia y los aprendizajes ulteriores.

Conclusiones

En la bibliografía analizada podemos observar dos formas de presentar los temas:

- Se da la definición, propiedades, ejemplos y ejercicios para resolver entre los que aparecen situaciones problemáticas.
- Se presenta una situación problemática a partir de la cual se van construyendo los conceptos a enseñar, en este caso funciones exponenciales y logarítmicas.

Si los alumnos tienen que hacer una elección entre estas dos formas presentadas anteriormente, optan por la primera, ya que en general manifiestan que prefieren algo así como la “receta” ya que les resulta mas interesante un estudio guiado que los conduzca a una rápida solución de las situaciones planteadas.

Conceptualizar un objeto matemático no puede ser sólo la automatización de ciertos algoritmos o la comprensión de nociones, sino que implica una coordinación de registros de representación. Esta coordinación de registros es una de las condiciones fundamentales para el aprendizaje de las funciones. La ausencia de coordinación no dificulta toda la comprensión, pero favorece sólo en parte las transferencias y los aprendizajes posteriores.

Por otro lado, la forma de introducir los temas a través de situaciones problemáticas permitirá a los estudiantes reconocer en que momento lo aprendido es aplicable en una situación concreta. Si a esto le sumamos además la articulación entre varios registros de representación, permitirían una comprensión casi acabada del concepto.

Las actividades que promueven la representación de una misma función por diferentes fórmulas algebraicas, pueden contribuir a que los alumnos distingan el objeto matemático función de una fórmula que lo pueda representar.

Desde hace varios años se ha venido trabajando esta problemática buscando estrategias de enseñanza aprendizaje, que incluyan además ejemplos y problemas del área de Biología, enfatizando el trabajo con los alumnos, ya que muchas veces los docentes no logran incitar el interés y la imaginación de los estudiantes de biología por la utilidad y belleza del arte de las matemáticas.

Las situaciones “problemas matemáticos” son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones constituyen el componente práctico de las matemáticas.

Bibliografía

Camuyrano, M., Net, G., Aragón, M. (2000). *Matemática I. Modelos Matemáticos para interpretar la realidad*. Argentina: Estrada.

Berio, A., Colombo M.L., D'Albano, C., Sardella, O.(2001). *Matemática 2. Buenos Aires, Argentina: Puerto de Palos*.

Larson R., Hostetler, R., Bruce, E. (1995) *Cálculo y Geometría Analítica. Volumen 1*. España: McGraw-Hill.

Stewart, J. (1998). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. México: Internacional Thomson Editores S.A

Duval, R. (1998). *Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

K. Newstaed (eds): *Proceedings of the 22nd PME conference* (3), 1-8 Stellenbosch; South Africa