

TRANSVERSALIDAD DEL CONCEPTO DE INDEPENDENCIA LINEAL EN ALGEBRA LINEAL, ANÁLISIS NUMÉRICO Y ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Elisa S. Oliva, María I. Ciancio y Susana B. Ruiz
 Universidad Nacional de San Juan
 eoliva@iinfo.unsj.edu.ar, elisaoliva65@gmail.com, miciancio@hotmail.com

Argentina

Resumen. Anomalías entre enseñanza y aprendizaje se evidencian en falta de articulación de conceptos. Nuestra propuesta consiste en una secuencia didáctica, para establecer un andamiaje para articular el concepto de Independencia Lineal, definido en Algebra y que tiene ramificaciones en: ecuaciones diferenciales, polinomios de interpolación, etc. Para el aprendizaje y resignificación del concepto, se trabajó con alumnos de las Lic. en Geofísica y en Astronomía de la UNSJ, en : Algebra Lineal - Análisis Numérico- Análisis Matemático II. El equipo que participó, valoró la experiencia como exitosa por la cantidad de contenidos matemáticos que llegaron a integrar los alumnos.

Palabras clave: independencia lineal, transversalidad, articulación

Abstract. The anomalies between teaching and learning are evident in the lack of articulation of concepts. Our proposal consists of a didactic sequence, to set up scaffolding to articulate the concept of linear independence, defined in Algebra and with branches in: differential equations, polynomials of interpolation, etc. For the learning and the resignification of the concept, we worked with students from the LIC. in Geophysics and Astronomy of UNSJ, in : Linear Algebra - Numerical Analysis - Mathematical Analysis II. The team who participated, assessed the success of the experience in the amount of mathematical content that the students managed to integrate

Key words: linear independence, transversality, articulation

Introducción

La falta de articulación de conceptos son situaciones de anomalía entre las fases de enseñanza y de aprendizaje. La presencia de un pensamiento sistémico en la adquisición de conceptos desempeña un papel importante en un profesional universitario. El logro de la capacidad de síntesis en el alumno, se evidencia en que alcanza una organización de pensamiento, que le permite establecer conexiones, reflexionar de manera general sobre conceptos que forman un todo coherente a los que les puede aplicar procedimientos para resolver problemas; esta forma integradora de pensar está relacionada con el pensamiento teórico (Sierpinska, 2000) y con el pensamiento sistémico (Sierpinska et al., 2002).

Nuestra propuesta consiste en una secuencia didáctica diseñada en tres bloques para establecer un andamiaje para la articulación del concepto matemático de Independencia Lineal. Este concepto definido primariamente en algebra lineal, tiene ramificaciones en otros contenidos matemáticos como: bases de un espacio vectorial, solución de ecuaciones diferenciales, determinación de polinomios de interpolación y ajuste de datos, análisis de componentes principales en estadística, aplicaciones en economía e ingeniería, etc. Se busca potenciar la vinculación transversal de las cátedras, por el aprendizaje y resignificación de este concepto, se propone para ello el trabajo con

los alumnos en los bloques: Álgebra Lineal - Análisis y Cálculo Numérico- Análisis Matemático II , de las Lic. en Geofísica y Lic. en Astronomía de la Fac. de Cs. Exactas Físicas y Naturales- UNSJ .

Implicadas en este proceso las cátedras mencionadas implementaron fomentar el análisis algebraico y la visualización gráfica como fuente de conocimiento, elaborando un programa de prácticas con el uso de computadora, basada en los siguientes objetivos:

- ❖ Participación activa del alumno en el conocimiento del concepto teórico de Independencia Lineal (en distintos Espacios Vectoriales) y de los comandos del software para la discusión analítica y solución a problemas planteados.
- ❖ Intervención dinámica del estudiante en la búsqueda de bases gráficas del software que den solución gráfica a problemas planteados. Integración de conceptos del área matemática y computación.
- ❖ Generar, con ayuda de un enfoque geométrico, una superación de la dicotomía entre teoría y práctica.
- ❖ Iniciar a los alumnos en la experimentación, animarlos a realizar investigación y a producir respuestas.

Esta nueva formación que reciben nuestros alumnos, está basada en la idea de que saber matemática, es hacer matemática, mediante la resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, las conexiones, la investigación y la exploración.

Metodología

Las competencias matemáticas abren puertas hacia futuros productivos, por ello el que entienda y pueda usar matemática tendrá mejores oportunidades en su futuro. En este sentido, el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de los Estados Unidos (NCTM, 2000) cuestiona la noción que las matemáticas son para un pequeño y selecto grupo de personas. Por el contrario, todos necesitan entender matemáticas y los estudiantes deben tener la oportunidad y la ayuda necesaria para aprender contenidos matemáticos que sean relevantes con profundidad y comprensión.

La Educación Matemática plantea entre sus objetivos, que los estudiantes logren articular temas matemáticos, de manera que puedan formar conceptos más complejos. Uno de los beneficios de adquirir esta cualidad de articular saberes, es que permite resolver diversos problemas matemáticos presentados por el profesor o inclusive problemas de la vida cotidiana, debido a que lo incentiva para ir aprendiendo ideas matemáticas cada vez más complejas a medida que avanza en sus estudios (Pérez Pérez, 2007).

Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones matemáticas en la rica interacción entre los temas matemáticos, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas (NCTM, 2000).

El sistema educativo no puede mantenerse al margen de la multitudinaria explosión de la aplicación de las nuevas tecnologías en muchos aspectos de la vida cotidiana, precisa incorporar el manejo de informática como uno de sus objetivos, para obtener el conocimiento.

El progresivo aumento de memoria virtual, permite el acceso a paquetes de cálculo simbólico, que en otra época sólo estaban disponibles en grandes centros de investigación, que no requieren costosos aprendizajes. Esto estimula el uso didáctico de las computadoras en el tratamiento de los temas habituales de Matemática, permitiendo a los alumnos dejar de ser pasivos espectadores en las clases, para convertirse en partícipes activos, generando su propia formación.

El presente trabajo consiste en una secuencia didáctica, que involucró un trabajo conjunto de las cátedras de Álgebra Lineal - Análisis y Cálculo Numérico- Análisis Matemático II, respecto del contenido de INDEPENDENCIA LINEAL, con el objetivo de que los alumnos logaran una estructura superior de pensamiento, ensamblando las piezas en donde este contenido está presente en las tres asignaturas, para lograr armar un rompecabezas de saberes matemáticos.

La primera asignatura, que se abordó fue Álgebra Lineal, porque es primariamente definido allí y trabajado en distinto tipo de espacios vectoriales y tiene ramificaciones en otros contenidos matemáticos como: bases de un espacio vectorial.

Se toma como punto de partida la definición de los conceptos de Independencia Lineal de vectores y de Dependencia Lineal, su posterior análisis algebraico para distintos conjuntos de vectores y a su vez variando el espacio vectorial considerado. Se incorpora la perspectiva geométrica del concepto de independencia lineal en los espacios vectoriales \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Posteriormente se desafía al alumno a una verificación algebraica rutinaria (Grossman, 1999), (Lay, 2007) y a que presente sus propios ejemplos algebraicos y a que integre através de la visualización gráfica de ejemplos concretos de conjuntos de vectores en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , cumpliendo cada uno alguna consigna prefijada, por el docente.

La propuesta de anexar al trabajo simbólico-algebraico, la obtención de conclusiones gráficas, es porque al alumno le cuesta materializar en ejemplos concretos el concepto en estudio. Contando con un software científico con excelente capacidad gráfica, numérica y simbólica, se alcanza el concepto observándolo desde distintas interpretaciones geométricas, por eso se da un fuerte énfasis a visualizar ideas, sobre una verificación algebraica rutinaria.

En la asignatura de: Análisis y Cálculo Numérico, se trabaja sobre el planteo “Cuando se tiene un número finito de mediciones sobre un fenómeno que se está investigando y se quiere extraer información de esos datos, reconstruyendo el fenómeno en su totalidad (en un “dominio continuo”), con la función que represente “lo mejor posible” los datos: Curvas de Ajuste y Polinomio de Interpolación” .

Se abordó el concepto del Wronskiano, pues su aplicación permite elegir funciones de ajuste (monomios, funciones trigonométricas, etc.) (Nakamura, 1997) que cumpliendo el concepto de Independencia Lineal, ayudan a decidir la aplicación de Polinomios de Interpolación y/o Polinomios de Ajuste, según las características del conjunto de datos a trabajar.

Posteriormente se desafía al alumno a que presente sus propios ejemplos algebraicos, cumpliendo el conjunto de mediciones alguna consigna prefijada, por el docente, siempre realizando a través del uso del Wronskiano la verificación de la Independencia Lineal de las funciones usadas, para responder al planteo algebraico.

Luego en la asignatura de: Análisis Matemático II, se abordó la propuesta de hallar la Solución general de ecuación diferencial lineal homogénea EDOLH de orden n a coeficientes constantes. Se determinan soluciones particulares para este tipo de ecuaciones de orden 2,3 y 4, se verifica con wronskiano si son Linealmente Independientes y en caso afirmativo se construye la Solución General, realizando una combinación lineal de las n soluciones particulares que contiene n constantes arbitrarias (Stewart, 1998). El Wronskiano permite al alumno realizar la verificación de Independencia Lineal de las soluciones particulares, pues las representaciones gráficas de las soluciones particulares no proporciona información suficiente sobre este concepto.

Posteriormente se desafía al estudiante a que presente ejemplos cumpliendo la ecuación característica de la EDOLH de orden n con alguna consigna prefijada, verificación de la independencia lineal de las soluciones particulares, y comprobar que: “El conjunto de soluciones de una EDOLH de orden n es un espacio vectorial de dimensión n ”

Modelo de guías propuestas a los alumnos en la asignatura Algebra Lineal

Ej. 1.- Analice cuales de los siguientes conjuntos de vectores son L.I:

a) En \mathbf{R}^2 : $(1,2); (-1,0); (1,-1)$

b) En \mathbf{R}^3 : $(3,1,1); (2,-1,5)$

c) En \mathbf{R}^3 : $(1,0,-1); (1,2,1); (0,-3,2)$

d) En \mathbf{P}_2 : $1-x; 3-x^2; x$

e) En \mathbf{M}_{22} : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

f) En \mathbf{M}_{22} : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

Ej. 2.- Los siguientes conjuntos de vectores son LD, justifique algebraicamente:

a) \mathbf{R}^2 : $(1,1);(2,2)$

b) \mathbf{R}^2 : $(1,1);(2,2);(5,5);(0,-1)$

c) \mathbf{R}^3 : $(1,1,2);(2,-1,-5);(1,-1,-4);(2,1,1)$

d) \mathbf{P}_2 : $1-x; 3-x^2; x; -5x+7-2x^2$

e) \mathbf{M}_{22} : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Ej.3.- Responda a las siguientes condiciones:

- Determine el valor de la constante "c", para que los vectores $\{(8,2,4); (0,-1,c); (1.5,0.5,0)\}$ sean Linealmente Independientes

❖ Analice para que valores de "c": $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \right\}$ son L.I. en \mathbf{M}_{22} .

- ❖ Dados los vectores $(8,2,4); (0,1,k); (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Determine el conjunto de valores para la constante "k", para que los vectores sean Linealmente Independientes

- ❖ Dados los vectores $1-x; 3-kx^2; \frac{k}{2}x$. Determine el conjunto de valores para la constante "k", para que los vectores sean Linealmente Independientes .

❖ Analice para que valores de "c": $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -c^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \right\}$ son L.I. en \mathbf{M}_{22} .

Ej.4- Indicar si los conjuntos de vectores de los Gráficos 1, 2, 3, 4 y 5 de \mathbf{R}^2 , son o no Linealmente Independientes.

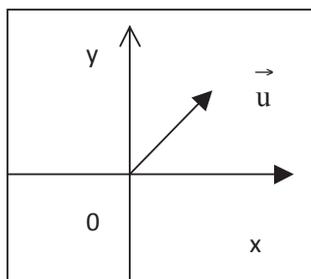


Gráfico 1

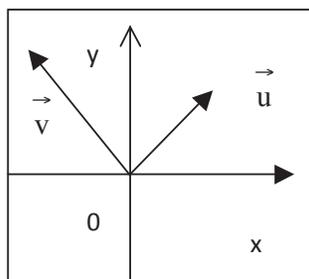


Gráfico 2

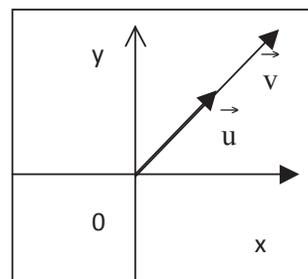


Gráfico 3

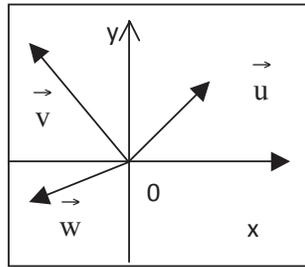


Gráfico 4

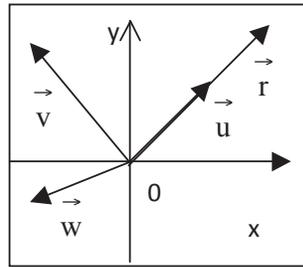


Gráfico 5

Ej.5- Dar un ejemplo de un conjunto en \mathbb{R}^2 , de seis vectores que no sea linealmente independiente.

Ej.6- Indicar si los conjuntos de vectores de los Gráficos 1, 2, 3, y 4 de \mathbb{R}^3 , son o no Linealmente Independientes.

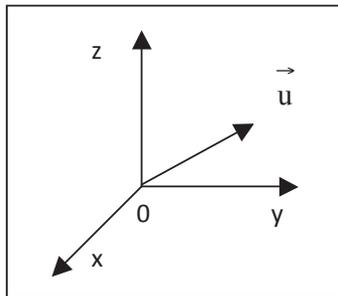


Gráfico 1

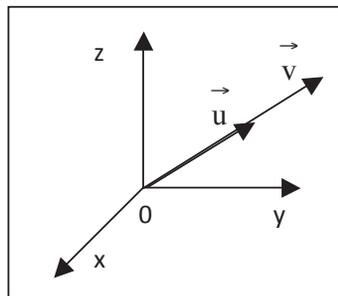


Gráfico 2

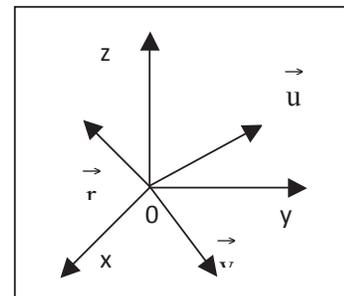


Gráfico 3

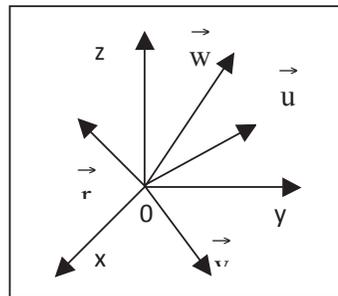


Gráfico 4

Ej.7- Para cada una de las siguientes situaciones, dar un ejemplo de un conjunto en \mathbb{R}^3 , talque:

- ❖ Esté formado por 2 vectores y sea Linealmente independiente.
- ❖ Esté formado por 3 vectores y no sea linealmente independiente.
- ❖ Esté formado por 5 vectores y sea Linealmente Dependiente.

Ej.8-Demostrar las siguientes situaciones:

- ❖ En un espacio vectorial V , se sabe que los vectores $\{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \}$, son Linealmente Inde-

pendientes. Demuestre que los vectores $\{ \vec{c} + \vec{b} - 3\vec{a}, \vec{c} - 3\vec{b} + \vec{a}, \vec{b} - \vec{a} \}$ son Linealmente Dependientes.

- ❖ En un espacio vectorial V , se sabe que los vectores $\{ \vec{x}, \vec{y}, \vec{w} \}$, son Linealmente Independientes. Demuestre que los vectores $\{ \vec{w} - \vec{x}, c\vec{w} + \vec{y}, c\vec{y} + \vec{x} + 3\vec{w} \}$ con c constante, $c \neq 0$, $c \neq \pm 2$, son Linealmente Independientes

Conclusiones

La construcción del concepto algebraico de Independencia Lineal no resulta sencillo, cuando se cambia del Espacio Vectorial \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , al de Polinomios o Soluciones de una EDOLH de orden n , debido a las características propias del álgebra. En la interpretación de las gráficas de la independencia lineal de funciones polinómicas, o Soluciones de una EDOLH de orden n , algunos estudiantes intentan transferir conocimientos adquiridos en el cálculo y geometría analítica, realizando incorrectamente intersecciones entre curvas, etc.

El desarrollo de la capacidad para determinar cuál es la herramienta más adecuada según la naturaleza del Espacio Vectorial para analizar el concepto en estudio (algebraico, exploración gráfica y/o una combinación de visualización geométrica con rigurosidad simbólica) demuestra el dominio transversal del mismo.

La puesta en práctica de las actividades anteriores fue exitosa, pues si bien es una actividad de este grupo de docentes realizada con el mismo conjunto de alumnos a lo largo de dos años. El equipo de estudiantes que intervino en la experiencia valoró la cantidad de elementos matemáticos que llegaron a discutir, pues al término de la experiencia los participantes sienten satisfacción por la actividad matemática desarrollada.

Referencias bibliográficas

- Grossman, S. (1999). *Algebra Lineal*. Editorial Mc Graw Hill
- Lay, D. (2007). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. México: Pearson Addison Wesley
- Nakamura, S. (1997). *Análisis Numérico y visualización gráfica con Matlab*. México: Prentice-Hall
- NCTM. (2000). *Resumen Ejecutivo de Principios y Estándares de la Educación Matemática*. Extraído el 14/09/2013 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/archivos/RE_NCTM.pdf
- Pérez Pérez, I. (2007). *Articulación de saberes matemáticos y modelos conceptuales*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students'thinking in Linear Algebra En J. L. Dorier, (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktaç, A. (2002). *A Study of Relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra*. Montreal, Canada: Concordia University.

Stewart, J. (1998). *Cálculo*. México: Editorial Thomson