

## HACIA UN MODELO TEÓRICO RESPECTO A LA ENSEÑANZA DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS QUE FAVOREZCA EL TRABAJO HEURÍSTICO Y LAS PRÁCTICAS ARGUMENTATIVAS

Liliana Siñeriz, Gregoria Guillén y M<sup>a</sup> de la Trinidad Quijano  
Universidad Nacional del Comahue  
Universitat de València  
lsineriz@gmail.com, gregoria.guillen@uv.es, trinidadquijano@gmail.com

Argentina  
España

**Resumen.** Presentamos una síntesis de un proyecto, actualmente en desarrollo, centrado en la enseñanza de las construcciones geométricas. En el estudio se conjugan dos líneas de investigación, desde donde se indagan elementos relativos a la enseñanza de resolución de problemas y de contenidos geométricos, con el fin de precisar competencias específicas que se ponen en juego al abordar esta clase de problemas, que pueden tomarse como referente para diseñar y/o analizar planes de formación de profesores de distintos niveles educativos. Damos cuenta de los resultados alcanzados hasta el momento, así como también de la forma en que continuará la investigación.

**Palabras clave:** geometría, construcciones, heurísticas, procesos matemáticos

**Abstract.** We present an overview of a project, currently in development, focusing on the teaching of geometric constructions problems. The study combined two lines of research, where elements of teaching problem solving and geometric content are investigated, in order to pinpoint specific competences that are brought into play to tackle this kind of problems, which can be a reference for designing and/or analyzing teacher training plans of different educational levels. We account for the results achieved so far, as well as how the investigation will continue.

**Key words:** geometry, constructions, heuristics, mathematical processes

### Introducción

En investigaciones anteriores ya hemos destacado la importancia de los problemas de construcción para trabajar elementos de resolución de problemas (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006). En el proyecto de investigación que presentamos en este informe (Siñeriz y Guillén, 2010-2013) nos hemos propuesto conjugar dos líneas de investigación referidas a la enseñanza de resolución de problemas (RP) y a la enseñanza de contenidos geométricos (CG). Nuestra intención es elaborar un Modelo de Competencia (MC) al enseñar construcciones geométricas; esto es, identificar los elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar este tipo de problemas, cuando dicha enseñanza tiende a promover la exploración, las prácticas argumentativas y la apropiación de procedimientos de carácter heurístico. Dicho modelo se constituye a partir del análisis de los problemas, del proceso de resolución y de la actuación experta, es decir de una persona que tiene experiencia en un dominio, y se utilizará como referente para analizar otros planes de formación.

Para ello hemos resuelto explorar la enseñanza de las construcciones desde cuatro ópticas diferentes: desde las destrezas, desde el proceso de resolución de problemas, desde los métodos y desde los contenidos matemáticos. Estos enfoques han llevado a programar diferentes estudios

exploratorios, en los que se ha considerado a la RP en su doble aspecto, como contenido y como metodología, en consonancia a los propósitos que se desprenden de los actuales diseños curriculares.

Hemos diseñado e implementado Modelos de Enseñanza (ME) donde se abordan estos problemas en distintos niveles educativos y hemos acotado el análisis de la actuación docente a determinados problemas.

Las fuentes de información de los estudios exploratorios son diversas. Por un lado, provienen de la observación de la actuación de dos formadoras de profesores, expertas en la enseñanza de RP y de CG, una de ellas de nivel primario y la otra de nivel secundario, con el fin de identificar elementos que forman parte de la competencia. Por otro lado, se observan las clases de dos profesoras de secundaria que tuvieron una formación previa en métodos y heurísticas de RP, con la intención de introducirnos en una nueva problemática: la de examinar cómo la enseñanza recibida condiciona los entornos de aprendizaje que los docentes de secundaria crean en su actividad de enseñanza.

Las situaciones de enseñanza correspondientes se recogieron en audio y/o video; se confeccionaron registros de cada clase y a su término se realizaron notas sobre el desarrollo de las mismas, por parte de la docente implicada y de otros investigadores del equipo.

Estos estudios se desarrollaron en diferentes etapas y ya se han publicado algunos resultados. En este reporte de investigación vamos a describir brevemente el trabajo desarrollado en el marco del proyecto mencionado en cada una de estas etapas; adelantamos también cómo estamos continuando el mismo al considerar los propósitos iniciales y las posibles vías abiertas que se vislumbran con el trabajo realizado.

### **Antecedentes. Marco teórico**

En Guillén y Siñeriz (2012) describimos brevemente los marcos teóricos de las dos líneas de investigación que se conjugan en este proyecto.

Desde la enseñanza de resolución de problemas, consideramos las elaboraciones teóricas en torno a los problemas de regla y compás (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006), donde se extrapolaron y reformularon algunos resultados derivados de Polya (1965, 1962-1965) y de Schoenfeld (1985), lo que llevó a caracterizar la conducta competente en función de las fases del proceso de resolución, del espacio teórico de problemas y de los aspectos cognitivos, diferenciando a éstos en *contenido matemático*, *trabajo heurístico* y *gestor*. Asimismo, rescatamos la clasificación de heurísticas de Puig (1996), distinguiendo entre *destrezas heurísticas*, *herramientas heurísticas*, *métodos heurísticos*, *sugerencias heurísticas* (Quijano y Siñeriz, 2012).

Desde la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos, centramos la atención en conceptos, procesos matemáticos y relaciones, fijándonos en las acciones que se realizan asociadas a estos contenidos como componentes de la práctica escolar. En esta dirección nos basamos en trabajos previos sobre los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos (Guillén, 2004, 2005, 2010).

Por otra parte, a fin de atender a los procesos inherentes a la práctica profesional, consideramos las dimensiones propuestas por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) que caracterizan la enseñanza “proficiente”. En este sentido centraremos también la atención en los *contenidos para la enseñanza* que le permiten al docente interpretar y planificar las situaciones de aula (reflexión sobre la propia práctica, conocimiento sobre los estudiantes como pensadores y aprendices, sobre la organización-gestión del aprendizaje).

### Etapas de la investigación

Como hemos indicado en la introducción, la obtención y análisis de datos se ha planeado en diferentes etapas, que se corresponden con diferentes estudios exploratorios que se complementan y que contemplan los propósitos del proyecto.

#### Primera Etapa:

Esta etapa se centra en la formación de profesoras de secundaria cuyo plan de enseñanza será objeto de estudio en una fase posterior.

Continuando con las investigaciones anteriores en relación a los problemas de regla y compás (Siñeriz, 2002) se ha diseñado un Modelo de Enseñanza Inicial, el cual se conformó de dos partes, considerando a las docentes en su doble rol: como resolutoras y como orientadoras del trabajo en el aula.

Se realizaron ocho encuentros semanales de 2½ hs cada uno, destinados a la enseñanza de métodos (Análisis-Síntesis; Método de los dos Lugares; Método de la Figura Auxiliar, Método de la Figura Semejante), a través de la resolución de problemas seleccionados para tal fin. También se explicitaron las herramientas heurísticas involucradas (consideración de casos particulares; examen de posibilidades, analogía) y las sugerencias generales (buscar problemas relacionados, resolver el problema de forma diferente, analizar la solución) que ayudan a avanzar en el camino de solución, o bien se dirigen a ampliar los conocimientos matemáticos del resolutor. Con el propósito de promover espacios para la argumentación, se instala el análisis continuo de la cantidad de soluciones, de las condiciones de existencia y/o unicidad de la solución, del conjunto de datos del problema. En esta instancia se aspira a que las profesoras puedan, a partir de los problemas seleccionados, familiarizarse con los métodos y con la forma de trabajo en los problemas.

Posteriormente se ofrecieron dos seminarios, centrando la atención en el rol de los métodos como generadores de problemas, en las fases del proceso de resolución como organizadoras de dicho proceso y en los aspectos cognitivos implicados al resolver esta clase de problemas. En dos encuentros de 2½ hs se analizaron transcripciones de clases de escuela secundaria, provenientes de observaciones hechas en el marco de las investigaciones sobre problemas de regla y compás, en las cuales una profesora con formación previa en métodos, enseña contenidos curriculares a partir de dichos problemas. Además, se discutieron posibles consignas que permitirían promover la producción de argumentos por parte de los estudiantes y el uso de distintas heurísticas.

Por último, las profesoras participantes consensuaron una propuesta didáctica, y cada una adaptó modos y tiempos de acuerdo a las condiciones particulares de su contexto escolar. Se realizaron sendas experimentaciones áulicas en 1° año de establecimientos de escuela secundaria en San Carlos de Bariloche; se registraron las intervenciones docentes y las resoluciones de los alumnos.

### Segunda Etapa

Esta etapa estuvo centrada fundamentalmente en el diseño de Modelos de Enseñanza desde las distintas perspectivas adoptadas, cuyo análisis llevaría a identificar elementos de competencia que serán los referentes para analizar actuaciones docentes y producciones de alumnos.

Hemos puesto la atención en determinados problemas, que se abordan desde distintos puntos de vista. Si bien cada problema tiene su propia especificidad, también puede contribuir a identificar elementos para el análisis de otros problemas.

Hemos seleccionado situaciones abiertas (SA) susceptibles a ser abordadas en diferentes niveles educativos. Particularmente se ha trabajado la construcción de circunferencias tangentes a otras dos y algunas construcciones de triángulos dados diferentes datos.

Las experimentaciones se desarrollaron en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue y en la Escuela Universitaria de Magisterio de la Universidad de Valencia.

El ámbito de estudio estuvo constituido por dos formadoras de profesores que imparten la enseñanza en asignaturas del campo de la Didáctica de la Matemática, una de ellas de nivel primario y la otra de nivel secundario. Se observó la implementación de un plan de enseñanza en el marco de una asignatura de 4° año de Magisterio y el desarrollo de una SA en dos asignaturas del último año del Profesorado de Matemática, y se recogieron las producciones de los alumnos. Asimismo, a fin de tener datos desde una nueva perspectiva, se realizaron observaciones de clase en Representación Gráfica, asignatura de 1° año de Ingeniería a cargo de un profesor que participa en el proyecto. Las situaciones de enseñanza correspondientes se recogieron en audio o video.

En la formación de profesores de Matemática la SA “construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores” fue propuesta en las asignaturas “Seminario de la Enseñanza de la Matemática” y “Didáctica Especial y Residencia” para promover la reflexión sobre el propio proceso de resolución. En la primera, se planteó para analizar las heurísticas y métodos implicados, y en la segunda, para interpretar dicho proceso desde las producciones teóricas de Polya y Schoenfeld (fases, episodios, recursos, heurísticas, gestión) y anticipar intervenciones centradas en la visión retrospectiva (revisión-extensión del problema). Asimismo, la situación fue una de las construcciones trabajadas en el tema “empalmes”, en la asignatura “Representación Gráfica” de 1º año de Ingeniería, para la aplicación de los algoritmos de construcciones elementales y la práctica en dibujo instrumental de precisión.

Por otro lado, esta SA fue parte del Modelo de Enseñanza (ME) desarrollado en Magisterio, en el marco de la asignatura “Didáctica de la geometría, de la medida, de la probabilidad y la estadística”, para trabajar contenidos geométricos a partir de distintos contextos. Cabe indicar que la enseñanza implementada también ha contemplado el trabajo con las operaciones básicas (copia de ángulos y segmentos), algunos enfoques para las construcciones elementales (mediatriz, rectas perpendiculares, bisectriz, rectas paralelas) a partir de contextos cotidianos, y la resolución de otras SA y problemas.

### Tercera Etapa

Se ha centrado en el análisis de datos. Por un lado se comenzaron a analizar las producciones de los alumnos de secundaria y de profesorado; en Quijano y Siñeriz (2012) presentamos sucintamente la propuesta implementada en el nivel secundario y el análisis de las respuestas de los estudiantes correspondientes a tres problemas de construcción de triángulos. Por otro lado, el foco de atención ha sido el análisis de las actuaciones de las docentes de planes de Formación de Profesores en torno a distintas SA, habiendo ya publicado algunos resultados que vamos a describir brevemente.

En Guillén y Siñeriz (2012) hemos examinado la actuación de la profesora de Magisterio de Valencia en torno a la SA “Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores”. Como ya indicamos, el análisis de esta actuación se ha realizado sobre la base de los elementos de competencia delimitados en estudios previos, referidos a la enseñanza de resolución de problemas y a la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos, y del ME previo desarrollado en el mismo ámbito del estudio. Caracterizamos la actuación de la profesora al desarrollar la SA y de esta manera hemos identificado nuevos elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar construcciones geométricas, que hemos asociado a la planificación de las sesiones de clase o que se pueden desarrollar con su actuación. En las

conclusiones subrayamos la transferencia de resultados de la investigación que hace la profesora a sus clases y lo adecuada que ha resultado la SA para lograr los objetivos planteados. Hacemos notar que las conclusiones no se pueden extrapolar a todos los planes de formación, para continuar se sugiere la búsqueda de otras situaciones con este potencial así como experimentar en otro ámbito de estudio.

En Guillén y Siñeriz (en prensa) se ha analizado la actuación de la misma docente en torno a la SA “Construir un triángulo dados dos lados y una altura”. Con este análisis también hemos dado cuenta de los elementos que se han considerado como objeto de enseñanza, que incorporamos a nuestro Modelo de Competencia para la enseñanza de construcciones geométricas; los mismos se refieren al planteamiento y resolución de problemas, a contenidos geométricos y a algunos aspectos de la enseñanza de los mismos. La diversidad de observaciones que se señalan en el análisis realizado refleja que esta nueva situación proporciona un contexto de RP propicio para poder usar e integrar una variedad de contenidos matemáticos trabajados previamente, contemplando a su vez otros contenidos pertinentes para la enseñanza de esta materia. En el trabajo se indican varios ejemplos de aportes de la investigación que se han considerado en su actuación; en las conclusiones se hace notar también las limitaciones del estudio para generalizar los resultados obtenidos.

Asimismo, en relación a la situación mencionada respecto a las circunferencias tangentes, hemos realizado la reconstrucción de la enseñanza y el análisis de datos correspondientes a las otras experimentaciones desarrolladas en la etapa anterior. Un primer análisis de la actuación nos lleva a observar algunas analogías en el marco de las dos asignaturas de Profesorado de Matemática. En ambos casos las orientaciones se dirigieron a: analizar los datos señalando las posibles alternativas, examinar la cantidad de soluciones, establecer condiciones para que la solución sea única, organizar los conocimientos y estrategias implicados en cada resolución, evaluar su efecto dentro del proceso, recuperar las ideas erróneas utilizadas y llevar a argumentar el por qué de los cambios de punto de vista, rescatar las distintas aproximaciones y promover la explicitación de las heurísticas subyacentes. Se introdujo el recurso tecnológico (Cabri-Géomètre II) para contrastar conjeturas y facilitar la elaboración de nuevas conjeturas y se propició la validación mediante el uso de las propiedades características de los lugares geométricos implicados.

Además, en el tratamiento llevado a cabo en Didáctica Especial y Residencia, al igual que en la asignatura de Magisterio, se ha contemplado un análisis preliminar de las producciones de los alumnos, que permitió a la docente seleccionar de cada una ciertos aspectos que se tomaron como objeto de enseñanza. En este sentido, dichas producciones se utilizaron para: 1. Mostrar los episodios identificados en una resolución; 2. Señalar la naturaleza general de preguntas incluidas en

la visión retrospectiva (que no contemplan las peculiaridades del problema) y el orden arbitrario de actividades propuestas para esta fase; 3. Rever la idea de creencias de acuerdo a la bibliografía de referencia; 4. Ilustrar la explicitación de la transformación del problema original al tomar un caso particular y sus infinitas soluciones; 5. Interpretar un plan seguido para el caso genérico. Estas observaciones han sustentado el diseño de un taller dirigido a profesores y alumnos de profesorado (Siñeriz y Yaksich, 2012).

#### Cuarta Etapa

En esta etapa nos hemos introducido en una nueva problemática: el análisis de la actuación docente en secundaria cuando se ha tenido una formación previa en RP.

Nos hemos centrado en el problema elemental de geometría plana “construir un triángulo dados sus lados”. Hemos examinado la actuación de la profesora de Magisterio durante el trabajo en dicho problema y el proceso de enseñanza desarrollado en el marco del ME inicial, impartido a las docentes de secundaria en la primera etapa de trabajo. De este modo, desde el análisis de la actuación experta en la enseñanza de RP y/o de CG, determinamos elementos de competencias que se ponen en juego al enseñar a partir de este problema. A su vez hemos utilizado estos referentes para hacer un análisis preliminar de la actuación de una de las profesoras de secundaria participantes, al tratar el mismo problema con alumnos de 1º año de escuela secundaria. Este análisis ha llevado a continuar examinando la actuación al extender el problema a una SA referida a la construcción de triángulos dadas ternas de lados y/o ángulos y, aunque la investigación actualmente esté en desarrollo y aún no se hayan publicado resultados al respecto, podemos adelantar que la riqueza de la situación y el carácter exploratorio del estudio hacen sentir la necesidad de ampliarlo a otras situaciones y a otras actuaciones en el ámbito de escuela secundaria.

#### Comentarios finales

En los trabajos ya publicados hemos subrayado que el estudio desarrollado hasta la actualidad ha hecho sentir la necesidad de prestar gran atención a la enseñanza de los contenidos tratados; como el aprendizaje de los mismos conlleva grandes dificultades, se hace necesario seguir explorando en esta dirección usando diferentes situaciones y/o problemas para desarrollar la enseñanza.

Por otro lado, cabe señalar que hasta ahora se ha examinado con detalle la actuación de una profesora de Magisterio de Valencia, al desarrollar las dos situaciones abiertas mencionadas, pero los resultados y conclusiones del estudio, si bien pueden tomarse como referentes para el análisis

de otros planes de formación, no se pueden extrapolar a todos ellos, con lo que se ha de seguir indagando en otros ámbitos de estudio.

Asimismo, el análisis de la actuación docente en secundaria está en su fase inicial. Se tiene previsto continuar analizando la actuación en secundaria al desarrollar la enseñanza vía otras situaciones o problemas y tomando como ámbito de estudio otros profesores de este nivel que previamente hayan tenido instrucción en RP y/o en CG.

La indagación sobre procesos de aprendizaje de los estudiantes al resolver diferentes SA o problemas también se contempla como propósito de la investigación, aunque el trabajo desarrollado esté en la fase inicial.

### Referencias bibliográficas

- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3), 103-125.
- Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, 17(2), 117-152.
- Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿y en la investigación? En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds), *Investigación en educación matemática XIV*, 21-68. Lleida: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Guillén, G. y Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F. García, y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI*, 331-340. Baeza: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Guillén, G. y Siñeriz, L. (en prensa). La enseñanza de resolución de problemas y de contenidos geométricos a partir de la construcción de triángulos. En B. Gómez y L. Puig (Eds). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática. PUV.
- Polya, G. (1962-1965). *Mathematical Discovery*. New York: Wiley & Sons.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [Traducido por J. Zagazagoitia]. México, DF: Trillas. (Trabajo original publicado en 1945).
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.

- Quijano, M. y Siñeriz, L. (2012). Construcciones de triángulos con regla y compás: análisis de producciones de estudiantes de nivel medio. En M. Ascheri, R. Pizarro, N. Ferreira y G. Astudillo (Eds.), *Memorias Reunión Pampeana de Educación Matemática IV*, 37-46. Santa Rosa: EdUNLPam.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic press.
- Schoenfeld, A. H. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 5(1), 79-101.
- Siñeriz, L. y Guillén, G. (2010-2013). Diseño e informes del proyecto *Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas*. Proyecto de investigación financiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue (04/BI58).
- Siñeriz, L., & Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En J. Aymerich y S. Macario Vives (Eds), *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 323-331). Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.
- Siñeriz, L. y Yaksich, A. (2012). El problema de las circunferencias tangentes: Un amplio camino para la construcción del conocimiento matemático. En M. Ascheri, R. Pizarro, N. Ferreira y G. Astudillo (Eds.), *Memorias Reunión Pampeana de Educación Matemática IV*, 12-13. Santa Rosa: EdUNLPam.