LA NOCIÓN DE CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA COMO HERRAMIENTA DE ANÁLISIS DE TEXTOS MATEMÁTICOS: SU USO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Vicenç Font, Juan D. Godino
Universidad de Barcelona. (España) y Universidad de Granada. (España)
vfont@ub.edu
Campo de investigación: formación de profesores
Palabras clave: configuración, epistémica, formación de profesores

Resumen
En este trabajo se argumenta primero que el análisis de libros de texto ha de ser una de las competencias contemplada en la formación de profesores. A continuación, se ilustra el análisis de textos matemáticos que resulta de la utilización del constructo *configuración epistémica*.

Introducción

Como afirman Hiebert, Morris y Glass (2003), un problema persistente en educación matemática es cómo diseñar programas de formación que influyan sobre la naturaleza y calidad de la práctica de los profesores. La ausencia de efectos significativos de los programas de formación de profesores en dicha práctica se puede explicar, en parte, "por la falta de un conocimiento base ampliamente compartido sobre la enseñanza y la formación de profesores" (p. 201). El saber didáctico que progresivamente va produciendo la investigación en educación matemática queda reflejado en diversas fuentes dispersas y heterogéneas (revistas, monografías de investigación, etc.), pero de manera más accesible a los profesores se refleja en los libros de texto escolares. Los manuales escolares constituyen la fuente inmediata donde se acumula la experiencia práctica de los profesores, y en cierta medida, los resultados de la investigación. En consecuencia, el análisis crítico de los textos escolares, la evaluación de su pertinencia, idoneidad, adecuación, etc. debe ser un componente importante en los programas de formación de profesores de matemáticas. "La preparación de programas de formación puede ser más efectiva centrándola en ayudar a los estudiantes a que adquieran las herramientas que necesitarán para aprender a enseñar, en lugar de competencias acabadas sobre una enseñanza efectiva" (Hiebert, Morris y Glass, 2003, p. 202). Pensamos que entre estas herramientas deben figurar los criterios para analizar la propia práctica docente y las lecciones de los textos escolares como fuente próxima para el diseño de unidades didácticas.
En el currículum de algunos países los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una "ontología" demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En nuestra opinión, es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas,…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc y 6) argumentaciones. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (CE a partir de ahora) cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático"[§§].

[§§] Si además de la "estructura" interesa analizar su "funcionamiento" con alumnos son necesarias otras herramientas que no se comentan en este trabajo.

En este trabajo nos proponemos mostrar que estas nociones pueden ser útiles para describir las características de los textos matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica. Centraremos nuestra atención en un breve texto del enunciado y demostración de un sencillo teorema de geometría plana – caracterización de la mediatriz de un segmento. La finalidad es tratar de dar una respuesta a una cuestión planteada en el contexto de la formación de profesores de matemáticas: *¿Cómo pueden hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?*

Un texto matemático como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión para mostrar el tipo de aplicación que hacemos al análisis de textos del constructo *configuración epistémica* propuesto por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (Godino 2002, Godino, Contreras y Font, 2006), vamos a utilizar (1) un texto correspondiente a la enseñanza media en Polonia y (2) la pregunta que hizo una formadora de profesores de matemáticas de este país a formadores de profesores de otros países (Polonia, Hungría, Italia, Holanda, Portugal y España) en el marco del diseño e implementación de un proyecto europeo para la formación permanente de profesores de matemáticas:

Cuestión: ¿Cómo podrían hacer los profesores un análisis lo más completo posible de esta demostración?

Teorema: La mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos del plano que están a la misma distancia de los puntos extremos del segmento.
Demostración: Si AB es el segmento, *m* es su mediatriz y C pertenece a *m*, los segmentos AC y BC son simétricos respecto de *m*, de donde resulta que $|AC| = |BC|$. Con esto probamos que si el punto pertenece a la mediatriz del segmento está a la misma distancia de ambos extremos del segmento.
Mostraremos que si el punto no pertenece a la mediatriz entonces no está a igual distancia de ambos extremos del segmento. Consideremos que el punto C está fuera de la recta m (ver dibujo).

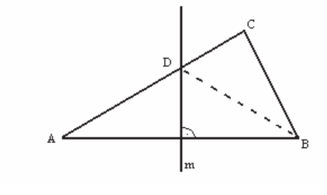

Figura 1

Unimos el punto c con los puntos A y B usando segmentos. Consideremos que C está situado al mismo lado de la recta m que el B. En este caso el segmento AC corta a la recta m en el punto D. Puesto que $|AD| = |BD|$ tenemos,

$$|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC| > |BC|.$$

De modo que $|AC| \neq |BC|$, lo que termina la demostración.

Configuración epistémica del texto sobre la mediatriz

Con relación a este texto podemos hacer, entre otras, las siguientes observaciones:

1) Se trata de un texto matemático que se debe enmarcar en una perspectiva "formalista" de las matemáticas de secundaria. Por tanto, es un texto matemático que nos presenta el "producto" acabado pero no el "proceso" que se ha seguido para obtener dicho producto, su razón de ser o motivación.
2) La estructura de este texto se puede representar por una configuración epistémica. En efecto, podemos considerar el enunciado no como un teorema demostrado sino como una situación- problema de demostración. Desde esta perspectiva lo que hay que hacer es conseguir demostrar el enunciado. El tipo de *situación-problema* implícita se puede describir como, ¿Qué argumento deductivo permite establecer que la proposición P es verdadera? ¿De qué conocimientos o proposiciones previamente establecidas debemos partir para establecer la verdad de P?

Para ello, hay que utilizar *conceptos* (la definición de la mediatriz, puntos extremos de un segmento; distancia, igualdad de segmentos). También se usan *proposiciones* del tipo "*si D es un punto del segmento AC, se cumple que* $|AC| = |AD| + |DC|$." o bien "si dos segmentos son simétricos respecto de una recta, tienen la misma longitud", dichas proposiciones se suponen demostradas anteriormente. Se usan también *argumentos* deductivos como el siguiente:"*Si* $|AD| = |BD|$ *entonces* $|AC| = |AD| + |DC| = |BD| + |DC|$.", etc. Por otra parte, puesto que el enunciado es la caracterización implícita de una definición es necesario probar dos proposiciones:

- Si una recta es mediatriz de un segmento entonces todos sus puntos equidistan de los extremos.
- Si un punto no está en la mediatriz de un segmento entonces las distancias a los extremos del segmento no son iguales.

Por tanto, hay al menos una *regla procedimental*: Para probar que un enunciado caracteriza a un objeto que se ha definido previamente hay que probar el teorema directo y el contrario ("Si C está en la mediatriz, entonces $|CA| = |CB|$"; "Si C no está en la mediatriz, entonces $|CA| \neq |CB|$".). Por último, también hay que utilizar un determinado *lenguaje* simbólico (por ejemplo $|BD|$) y gráfico (la figura del teorema), etc.

Por tanto, la estructura de este texto se puede representar por una configuración epistémica como la siguiente (figura 2):

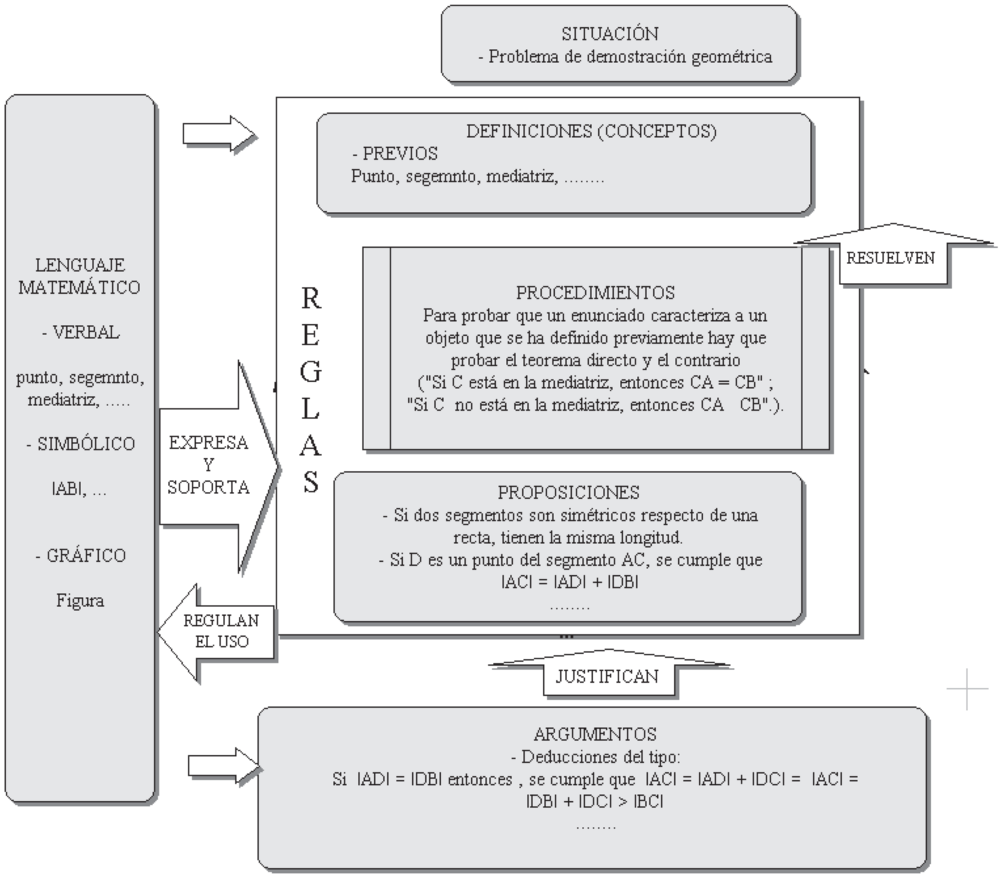

Fig. 2. Configuración epistémica asociada al texto de la mediatriz

3) Otra característica que hay que resaltar es la *conexión* entre los diferentes elementos de esta CE. Consideremos, por ejemplo, uno de los elementos del bloque "lenguaje", nos referimos a la figura 1 que aparece en el texto de la mediatriz. Nos podemos preguntar cuál es su función, o lo que en cierta manera es lo mismo, cómo se relaciona con los otros elementos de la CE.

La figura es estática pero, a pesar de ello, facilita el razonamiento con "elementos genéricos". El punto C por una parte es un punto particular, pero, por otra parte, lo que se dice de él se puede aplicar a cualquier otro punto del plano que no sea de la mediatriz (la cual debe permanecer como particular). Después el segmento AB (y su mediatriz) se puede considerar como un segmento (y su mediatriz) cualquiera. Dicho de otra manera la principal función que cumple la figura 2 es a) introducir un caso particular sobre el cual razonar y b) facilitar que este caso particular sea considerado como un elemento genérico (una cadena de elementos genéricos para ser más exactos).

5) Para comprender este texto matemático es necesario la activación de una configuración epistémica como la descrita anteriormente, pero que de esta configuración también pueden emerger nuevos "objetos" matemáticos. En concreto, a partir de este texto se construye una nueva definición de mediatriz y también se podría obtener un procedimiento de construcción de la mediatriz con regla y compás.

6) La modificación de alguno de los elementos de la CE repercute sobre los demás. Por ejemplo, si la representación de la figura se puede hacer con un programa

dinámico como el Cabri se está facilitando mucho el razonamiento con elementos genéricos. En concreto, se facilita no sólo la demostración del teorema (el producto) sino que, gracias a la abstracción reflexiva (si se toma como referencia a Piaget) o hipostática (si la referencia es Peirce), incluso se podría llegar a la formulación de aquello que se tiene que demostrar. Es decir, se podría modificar la situación problema para convertirla en una situación más rica ya que primero se podría proponer que se buscase aquello que se quiere demostrar y después, si se considera conveniente, pedir la demostración. Por ejemplo, podemos formular la siguiente pregunta a los alumnos:

Tarea: La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri:

a) Halla una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz.
a) Demuestra esta propiedad.
b) Da una nueva definición de mediatriz.
c) Halla a partir de los apartados anteriores un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

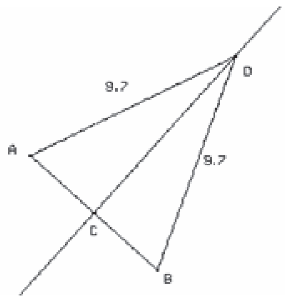

Fig. 3. La mediatriz con el Cabri

La configuración epistémica asociada es la siguiente:

LENGUAJE
Verbal mediatriz, segmento, recta perpendicular, punto medio etc. Gráfico - Figura geométrica dinámica Simbólico: A, B, …

SITUACIONES
- Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se ha de hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.

CONCEPTOS
Previos
- Segmento, recta perpendicular, punto medio - Mediatriz (definida como recta perpendicular que pasa por el punto medio)
Emergentes
- Mediatriz (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento)

PROCEDIMIENTOS	*PROPOSICIONES*
Emergente - Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz	- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud - La recta perpendicular forma un ángulo de 90º con el segmento - …. Emergente Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

ARGUMENTOS
- Justificación visual de la propiedad "Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento". - Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos. - Demostración deductiva (?)

Tabla 1. Configuración epistémica "emergente" asociada a la mediatriz

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Si bien este tipo de configuración epistémica puntual, orientada sobre todo a la emergencia de nuevos objetos, puede convivir con configuraciones epistémicas globales de tipo formalista, hay que resaltar que "viven" mejor en configuraciones epistémicas globales que no sean de tipo formalista, lo cual nos lleva a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las configuraciones epistémicas globales alternativas a las formalistas? La respuesta es que la principal alternativa a las configuraciones epistémicas formalistas son las empíricas (contextualizadas, realistas, inductivas, etc.).

Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que el constructo configuración epistémica resulta útil para el análisis de textos matemáticos, una de las competencias que debe contemplar la formación de profesores. También se ha puesto de manifiesto que los currículum de algunos países que consideran sólo dos tipos de objetos matemáticos: conceptos y procedimientos proponen una "ontología" demasiado simplista para analizar los textos matemáticos, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar.

Referencias Bibliografícas:

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22, (2/3): 237–284.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 26, 1, 39-88.

Hiebert, J., Morris, A. K., y Glass, B. (2003). Learning to learn to teach: An "experiment" model for teaching and teacher preparation in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 66: 201-222.