INTUICIÓN Y VISUALIZACIÓN: DEMOSTRACIÓN EN LA CONVERGENCIA DE SUCESIONES

Nancy Janeth Calvillo Guevara, Ricardo Arnoldo Cantoral Uriza
Cinvestav – IPN. (México)
calvillonancy@yahoo.com.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: convergencia de sucesiones, intuición, visualización, socioepistemología

Resumen

En el presente documento se reportan los avances de un trabajo de tesis cuyo propósito es estudiar la teoría de Sucesiones Numéricas Infinitas analizando su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema por medio de la visualización. Empezamos describiendo la problemática en la que hemos identificado que el paradigma de enseñanza que se sigue al estudiar las Sucesiones está centrado primordialmente en enfoques axiomático deductivos, posteriormente presentamos lo que se señala en la investigación acerca del tema que nos interesa y derivada de las consideraciones anteriores establecemos nuestra hipótesis de investigación, por último concluimos presentando algunos elementos para un análisis. Este trabajo es llevado a cabo siguiendo la Aproximación Socioepistemológica de la Investigación en Matemática Educativa.

Introducción a la problemática

Un aspecto que caracteriza al quehacer didáctico de nuestros días en el campo de la enseñanza de la matemática es el hecho de estar profundamente influido por una visión platónica del conocimiento: cuando un profesor "comunica verdades preexistentes" a sus alumnos mediante un discurso lo hace bajo el supuesto de que el saber matemático existe previo a la experiencia (Chimal, 2005); por otro lado, el paradigma de la enseñanza que se sigue en el sistema educativo está centrado fundamentalmente en enfoques axiomático deductivos y en la mera resolución de problemas (Cantoral y Montiel, 2003). Este *paradigma de enseñanza* es el que hemos identificado al abordar la enseñanza actual del tema de límites de sucesiones numéricas infinitas, esto es, se da a las sucesiones un tratamiento escolar basado fundamentalmente en el enfoque axiomático al presentar definiciones de sucesión y límite; además de brindar ejemplos de convergencia y divergencia así como algunas técnicas para el cálculo formal de límites; y finalmente se ocupa de la presentación y demostración de teoremas bajo esquemas formales. En este paradigma, basado en un enfoque tradicional, se estudia primero a la teoría de sucesiones numéricas infinitas y posteriormente a la teoría de series numéricas infinitas y de funciones, se sigue un patrón lineal en el que se les pide a los alumnos aprender la teoría de las sucesiones sin anteriormente haber tenido un trato digamos intuitivo que les permita dotar de significado y sentido a las definiciones, teoremas y demostraciones rigurosas. Con respecto a la teoría de convergencia de series, en (Farfán, 1997) se señala que en la historia de las ideas se pueden identificar dos grandes momentos claramente diferenciados para su tratamiento:

1. Surgimiento del cálculo de límites de algunas series particulares,
2. Surgimiento de una teoría general para la convergencia de series.

El cálculo de la suma en cuestión, es uno de los rasgos importantes del trabajo con series, que se da del siglo XIV al XVIII excepto, quizá, para la Serie de Taylor, que se constituye como un instrumento de *predicción*, con una lógica propia e independiente de otros temas de la convergencia. Es así que el trabajo con series, cabe decir, que no el estudio de su convergencia, se considera a partir de la Edad Media, época en la que se dio el primer esfuerzo por establecer las bases científicas del estudio de los fenómenos de variabilidad y cambio. De esta manera, para autores como Euler (Farfán, 1997), Bernoulli (Struik, 1986) y Oresme (Martínez, 2000), entre otros, encontrar la suma de algunas series infinitas fue un trabajo importante. Ejemplos característicos del cálculo de sumas durante el siglo XVIII, son los resueltos por L. Euler mediante el establecimiento de analogías muy ingeniosas, utilizando un estilo muy peculiar de descubrimiento matemático al que Abel nombrara como *inducción euleriana.*

En esta etapa del desarrollo conceptual, al que llamamos "*cálculo de sumas de series numéricas infinitas*" según se dijo anteriormente, consideramos que está presente un *obstáculo epistemológico* que impide el tránsito a la siguiente fase: el obstáculo consiste en adjudicar la naturaleza de los términos de la serie a su suma. Sus raíces se localizan en la concepción de función como expresión analítica arbitraria, propia del siglo XVIII (Farfán, 1997).

El trabajo de J. Fourier (1882) sobre la conducción del calor fue el medio en el que se reconoció como necesario el estudio de la convergencia como concepto autónomo según se señala en (Farfán, 1997). En síntesis, nos parece que encontrar el estado estacionario conduce, necesariamente, a la verificación de la convergencia y, por ende, a un estudio de ella. Visto así, el problema físico y el concepto matemático son indistinguibles en ese contexto (Farfán, 1997). Es decir, gracias al surgimiento de la teoría del calor es que se pudo pasar del momento inicial al momento final de los descritos como 1 y 2 anteriormente. Fue entonces que A. L. Cauchy se dio a la tarea de trabajar en la elaboración de criterios de convergencia de series.

Pudiera pensarse que el proceder heurístico descrito era una característica propia del momento en el que se buscaban respuestas a problemas concretos. Sin embargo, nos parece que ese no es el caso; en el propio ámbito de la constitución de la teoría del cálculo, se recurre a este *estilo de procedimientos* (Farfán, 1997). Además de esto, consideramos importante destacar el hecho de que en el siglo XVII los científicos fueron capaces de trabajar en una atmósfera que, lejos de ser conveniente para la creación, resultaba verdaderamente complicada. En algún tiempo desde 300 a. C. la geometría Griega Clásica no solamente había impuesto restricciones sobre el dominio de las matemáticas, sino que había impreso un nivel de rigor, para las matemáticas aceptables, que a juicio de Kline (1972) obstaculizaban la creatividad. Las personas de ese siglo rompieron ambos enlaces. El progreso en matemáticas casi demandó una completa indiferencia de escrúpulos lógicos y, afortunadamente, los matemáticos se atrevieron a dar lugar a las *intuiciones e ideas físicas*. Por su parte los hombres del siglo dieciocho extendieron el cálculo y encontraron nuevas ramas del Análisis, aunque encontraron en el proceso todas las molestias del proceso creativo: errores, lagunas y confusiones. Los matemáticos produjeron un tratamiento puramente formal del Cálculo y las resultantes ramas del Análisis, sus habilidades técnicas fueron guiadas, sin embargo, no por un marcado pensamiento matemático sino por ideas intuitivas y físicas (Ob. Cit.).

Como podemos observar de la lectura de los párrafos anteriores se advierte que el proceder heurístico (analogías, inducción y reconocimiento de patrones) así como el uso de la intuición y el apoyo en ideas físicas, estuvo presente de una manera muy característica entre los científicos de los siglos XVII y XVIII. Así encontramos que la primera lista de criterios de convergencia para series, en términos modernos, dada por Cauchy, proviene de la comparación con series cuya suma es conocida. De este modo, la consideración del estado estacionario marcará una *ruptura epistémica:* pues se traslada el problema del cálculo de sumas de series infinitas al estudio de su convergencia (Farfán, 1997). Es así que según

Farfán (Ob. cit.) cuando los momentos 1 y 2 antes descritos, se unen, es decir, se une lo particular con lo general, es que surge la teoría de sucesiones, a manera de formalización. Sin embargo, hoy en día ambos fenómenos son equivalentes en el tratamiento que los textos escolares hacen del tema; no obstante, en el terreno conceptual esto no es así.
Ahora bien, ¿qué señalan las investigaciones en el campo del Análisis Matemático – entendido éste como la teoría del cálculo? En lo que sigue presentaremos lo que se reporta en la investigación acerca de la intuición, la visualización, la convergencia y la convergencia de sucesiones.

Antecedentes

Cuando un estudiante tiene éxito trabajando genuinamente en un sistema formal, simbólico y axiomático, algunas veces es considerado evidencia de fuerte habilidad matemática (Harel y Sowder, 1998; en Alcock y Simpson, 2005). Sin embargo, los educadores matemáticos a menudo se preocupan por aquellos estudiantes que pueden realizar operaciones con símbolos, pero que aparentemente son incapaces de relacionar los símbolos con "las cosas que ellos representan" (Sfard and Linchevsky, 1994; en Alcock y Simpson, 2005). Es aquí donde enfatizamos, tiene que aprovecharse la intuición para ayudar al aprendizaje.
Así, en nuestra investigación la intuición será entendida como la captación primera de conceptos que nos permite comprender lo que nos rodea (Crespo Crespo & Farfán, 2005), sin embargo, un modelo intuitivo no será necesariamente una reflexión directa de cierta realidad (muchas veces estará basado en una interpretación abstracta de esa realidad) y uno de sus objetivos es crear aparición de certeza (Fischbein, 1987). La intuición producto de las imágenes conceptuales del individuo, se aproxima más a las ideas que maneja la lógica cuanta más información tiene éste (individuo) es así que el desarrollo de esta intuición lógica se ha comprendido como uno de los mayores objetivos de la educación matemática avanzada (Crespo Crespo, 2005). Uno de los factores que influye para que la intuición sea acertada, es la experiencia (Polya, 1966; Burton, 1999), misma que se adquiere mediante la imitación y el uso (Polya, 1966). Destacamos que estamos conscientes del alcance de la intuición, ya que muchas veces nuestros modelos intuitivos, nos llevan a interpretaciones incorrectas e incompletas (Fischbein, 1987).
Con respecto a la convergencia y convergencia de sucesiones comenzaremos con el trabajo de (Robert, 1982) ya que es una de las primeras investigaciones que se realizaron acerca del tema. Este trabajo es acerca de la adquisición de la noción de convergencia de sucesiones numéricas y describe la aplicación de una secuencia que incluye la resolución de un cuestionario en grupos, donde posteriormente interviene el profesor para introducir la definición de la convergencia al pasar de la expresión dinámica ya retenida, a la formulación numérica y después a la formalización en la que se insiste sobre el juego de las traducciones y de ahí a la formulación geométrica para la cual, incluso se regresó sobre el punto de las traducciones anteriores, remarcando el comportamiento cuando $n \to \infty$, es decir, *la representación de las* u_n*'s sobre un único eje*. Por otra parte, en el trabajo de (Sierpinska, 1987) se reporta que cuatro nociones parecen ser la principal fuente de obstáculos epistemológicos relacionados a límites: conocimiento científico, infinito, función y número real. Sierpinska esperó que el contexto de series infinitas ayudara a superar al menos algunos obstáculos relacionados con conocimiento científico, infinito y números reales.

Existen diversos estudios en la Matemática Educativa en los que la visualización ha sido el centro de la investigación, por ejemplo: (Cantoral y Montiel, 2001; Zimmerman y Cunningham, 1991), en particular nuestra investigación considera la definición presentada en (Cantoral y Montiel, 2001) en donde se considera a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual. En este sentido se trata de un proceso mental muy usado en distintas áreas del conocimiento matemático y, más generalmente, científico.

Una de las investigaciones en las que se ha vinculado la visualización y la convergencia de sucesiones es el trabajo de (Alcock y Simpson, 2005) en el que se abordaron problemas acerca de la convergencia de sucesiones y series hechos por estudiantes que no tienen tendencia a visualizar (tomando como 'razonamiento visual' la tendencia a introducir imágenes visuales al resolver problemas), además se confrontan los resultados con el trabajo de estudiantes que visualizan, descrito en (Alcock y Simpson, 2004), en el que se observa que estudiantes visualizadores tienen un fuerte sentido de los "objetos" y son a menudo rápidos y seguros al hacer un juicio acerca de la veracidad de un enunciado. Sin embargo, reportan que el éxito del trabajo visual en este nivel parece depender de que los estudiantes estén dedicados y sean capaces de establecer y usar relaciones entre su representación visual y la formal, si esto sucede los estudiantes están en una posición fuerte para usar su representación visual y así guiar su razonamiento formal. También observaron un rango de éxito y falla entre estudiantes que visualizan y aquellos que no visualizan. De ahí que sugieren que desde un punto de vista pedagógico no hay "presentación perfecta" que sea accesible y exitosa para todos los estudiantes.

El último trabajo al que queremos referirnos es el libro "Aproximaciones sucesivas y sucesiones" de Cantoral y Reséndiz (1997) donde encontramos que resulta importante analizar algunas de las representaciones gráficas que las sucesiones pueden tener, puesto que la visualización es un aspecto que suele ser poco aprovechado cuando se estudian sucesiones numéricas infinitas.

A manera de conclusión, los trabajos que analizamos muestran que existen diversos estudios en los que se está reportando la importancia de la intuición y la visualización al estudiar la Convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas, sin embargo, tenemos la sospecha de que en las aulas no pasa lo mismo, ya que en uno de los trabajos que encontramos acerca de la investigación en el aula se reporta que en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos son rígidos y poco reflexivos por parte del docente, en los que no se busca conocer cómo llega la información a los alumnos, así como la creencia de que los conocimientos que se pretende enseñar en la educación superior ya están acabados (Cantoral y Reséndiz, 2003). Es así que reconocemos en el Análisis Matemático una problemática en donde se da un mayor énfasis a los aspectos formales de la teoría considerando poco, o nada, a los procedimientos intuitivos y visuales

De esta manera identificamos en "La convergencia de Sucesiones Numéricas Infinitas" un escenario natural para poder explorar cómo la intuición y visualización de su teoría, influye en un alumno, pretendiendo con ello establecer un proceso de comunicación de las ideas en situación escolar con el fin de que los alumnos puedan construir la noción de Convergencia de Sucesiones, es decir, nuestra investigación propone estudiar la teoría de sucesiones atendiendo su construcción social, dando un tratamiento intuitivo del tema, por medio de la visualización antes que de lo riguroso y formal. Ello en virtud de que en su origen, las demostraciones de algunos de los teoremas relativos a sucesiones se dejaban a la interpretación de los lectores, en el entendido que podrían ser visualizadas o intuidas por

ellos: "Como en todos los casos en los cuales se trata de la convergencia de una sucesión, Cauchy gusta de obviar todos los detalles al considerarlos evidentes" (Cauchy, 1821/1994, p. 165). Es así que consideramos que las Sucesiones fueron un tema muy intuitivo, muestra de ello es la frase anterior, sin embargo hoy en día la teoría de sucesiones tiene un trato riguroso y formal. Por lo que, derivada de las consideraciones anteriores, establecemos nuestra hipótesis principal de investigación: "La construcción de la noción de convergencia de sucesiones por parte de los estudiantes, precisa de un trato intuitivo mediante la visualización de una particular representación gráfica de las sucesiones en un sólo eje"
Por último, estableceremos mediante una tabla (en similitud a la tabla propuesta en Farfán, 1997, p. 127–128) algunos elementos necesarios para realizar un esquema de la génesis y desarrollo histórico de la noción de demostraciones de la convergencia de sucesiones, desde un punto de vista epistemológico.

Fenomenología intrínseca del concepto de convergencia de sucesiones en su génesis

Etapas	Referente Concreto	Constructor
Construcción de algunas sucesiones	Estudio de Aproximación	Cálculo de números particulares irracionales
Uso de sucesiones en la teoría de convergencia de series	Determinación del estado estacionario	Criterios de convergencia de Series Analogías del caso finito al infinito "Lema de comparación"
Ruptura Epistémica Teoría de la convergencia de sucesiones		
Estudio de la convergencia de sucesiones	Noción de límite de una sucesión.	Definición. S es el límite de (S_n) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $N \in N$ tal que si $n \geq N$, entonces $\lvert S_n - S \rvert < \varepsilon$
	Unicidad de los límites	Teorema. Sea $(S_n)_N$ una sucesión cuyo límite existe. Afirmamos que el límite es ÚNICO.
	$\liminf$ y $\limsup$	Definición. Sea (S_n) una sucesión acotada en R. Definimos $\limsup S_n = \lim_{N\to\infty} \sup\{S_n : n > N\}$ $\liminf S_n = \lim_{N\to\infty} \inf\{S_n : n > N\}$
	Sucesiones de Cauchy	Definición. Una sucesión S es una sucesión de Cauchy si $\forall\ \varepsilon > 0$, existe un entero N tal que $m, n > N$ implica $\lvert s_m - s_n \rvert < \varepsilon$.

Referencias bibliográficas

Alcock L. y Simpson A. (2005). *Convergence of sequences and series 2: interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role.* Educational Studies in Mathematics, 58, 77-100.

Alcock L. y Simpson A. (2004). Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57: 1-32.

Burton, L. (1999). Why is intuition so Important to Mathematicians but Missing from Mathematics Education? *For the learning of Mathematics,* 19, 3, pp. 27-32.

Cantoral R. y Montiel, G. (2003). Una representación visual del polinomio de Lagrange, *Números. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas, España*, 55, pp. 3-22.

Cantoral R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático,* México: Pearson Educación de México.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (1997). *Aproximaciones sucesivas y sucesiones.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Chimal, R. (2005). *Una mirada socioepistemológica a la covariación.* Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Crespo Crespo, C. (2005). *El papel de las argumentaciones matemáticas en el discurso escolar. La estrategia de deducción por reducción al absurdo.* Tesis de maestría no publicada. Cicata, México.

Crespo Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, 3, 287-317.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Holland: Reidel Publishing.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from ancient to modern times,* vol. 2, USA, New York: Oxford University Press.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales,* Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN México.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3, 3, 305-341.

Sierpinska, A. (1987). *Humatities students and epistemological obstacles related to limits.* Educational Studies in Mathematics, 18, 371-397.

Struik, J. (1986). *A source book in mathematics, 1200-1800*, USA: Princenton University Press, Princeton, New Jersey.

Zimmerman, W. y Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning mathematics,* MAA Notes, 19.