

## LO PERIÓDICO EN LA RELACION DE UNA FUNCIÓN Y SUS DERIVADAS

Angeles Alejandra Ordóñez Morales, Gabriela Buendía Abalos  
Universidad Autónoma de Chiapas. (México)

[Anlejandra@hotmail.com](mailto:Anlejandra@hotmail.com), [gbuendia@hotmail.com](mailto:gbuendia@hotmail.com)

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior

Palabras clave: lo periódico, periodicidad; socioepistemología, comportamiento

### Resumen

Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición  $f$  periódica  $\Rightarrow f'$  periódica usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin embargo al trabajar en un contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje X y otro en el eje Y; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que no lo es; al explorar dicha relación usando movimientos hemos encontrado movimientos que no son periódicos y cuya velocidad sí lo sería. En este trabajo reportamos algunas dificultades al enfrentarnos con esta relación en escenarios periódicos en los contextos analíticos gráficos y físicos.

### Problemática

Una de las características del discurso matemático escolar tradicional ha sido centrarse en las definiciones, tal vez, por ello, deja de lado ciertos marcos de referencia donde pudiera resignificarse la matemática. Es así, que al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función  $f$  es derivable en un punto  $x$  si existe

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad  $f(x) = f(x + p)$  para todo  $x$  que pertenezca al dominio.

Uno de los principales resultados de la investigación en Socioepistemología es la formulación de epistemologías de prácticas en las que la imagen de un conocimiento matemático puro y limpio se deja de lado, para dar espacio a un conocimiento no lineal en el que las argumentaciones y herramientas lo reconstruyan continuamente (Cordero, 2003). En este trabajo abordamos el aspecto periódico en la relación de una función y sus derivadas debido a que en el discurso matemático escolar (DME), lo periódico en la relación  $f - f'$  se maneja en un contexto analítico al considerar cuestiones como:

- Supóngase que  $f$  es diferenciable y periódica, con periodo  $a$  (es decir,  $f(x) = f(x + a)$  para todo  $x$ ). Pruebe que  $f'$  es también periódica.
- Hallar una función  $f$  tal que  $f$  no sea periódica, pero  $f'$  sí.

Tal vez por ello, el referente obligado para hablar de lo periódico sean las funciones trigonométricas más simples y, en consecuencia, la implicación  $f$  es periódica  $\Leftrightarrow f'$  es periódica se trivializa al considerar únicamente estas funciones. Así, la propiedad periódica pareciera ser algo heredable de la función hacia su derivada y viceversa. Buendía (2004a) marca una diferencia entre *lo periódico* – termino con el cual tomaremos como todo aquello

en un sentido institucional, cultural e histórico referente a la periodicidad – y *la periodicidad* en el sentido utilitario que le ha impregnado el sistema didáctico. Así lo periódico es un atributo que caracteriza no sólo la repetición que presenta un objeto matemático, sino la forma como dicha repetición se presenta de tal manera que en el análisis de un objeto matemático es relevante no sólo que se repita, sino cómo se repite (Buendía, 2004b)

### **La socioepistemología de lo periódico**

Buendía (2004b) propone una socioepistemología de lo periódico, señalando a la predicción como una práctica asociada al reconocimiento de lo periódico y da cuenta que en un contexto de funciones y su representación gráfica, la predicción es un argumento en la construcción significativa de lo periódico. La práctica de predecir se fundamenta en la idea de describir el estado posterior de la gráfica de un movimiento basándose en el estado actual lo que equivale a utilizar la información de la cual se dispone, surgiendo en primera instancia una búsqueda de alguna unidad de análisis que permita comparar estados futuros con el estado presente:

En el marco de la socioepistemología de lo periódico se ha considerado que el reconocimiento útil de lo periódico queda fundamentado en el desarrollo de prácticas sociales como la predicción. Ello favorecerá, además, la percepción del conocimiento matemático como un saber articulado. Más que fijar el foco de atención en fórmulas, definiciones u objetos matemáticos aislados, la práctica de predicción propone relaciones y da coherencia al conocimiento matemático a lo largo de todo el sistema educativo; en particular, al comportamiento periódico. (Buendía, 2005)

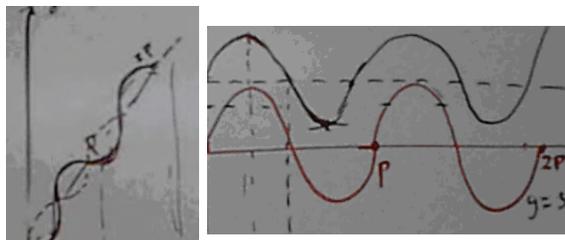
### **Lo periódico en la relación $f-f'$**

Lo periódico en la relación de una función y sus derivadas, en un contexto analítico queda en demostrar la veracidad de la proposición “Si es  $f$  periódica con periodo  $a$  y diferenciable, entonces  $f'$  es periódica” usando las definiciones de derivada y de función periódica; sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Creemos que al trabajar esta relación en distintos contextos, podemos hallar argumentos y herramientas situacionales que la resignifican además suponemos que transitar entre contextos es posible a través del ejercicio intencional de prácticas asociadas al reconocimiento significativo de la derivada y lo periódico. En este trabajo aun no tenemos resultados finales pero si hemos encontrado dificultades al estudiar aspectos periódicos en la relación  $f-f'$ .

En pequeñas exploraciones realizadas donde hemos implicado la relación de una función y sus derivadas en escenarios periódicos, notamos que al preguntar por la veracidad de las implicaciones  $f$  periódica  $\Rightarrow f'$  periódica,  $f'$  periódica  $\Rightarrow f$  periódica, profesores y alumnos de matemáticas suelen dar las como verdaderas.

Por otra parte, hemos encontrado que cuando a los estudiantes se les da la gráfica de las funciones  $f(x) = \sin x$  y  $f(x) = x + \sin x$  y se le pide verificar sobre ellas la propiedad periódica dada por  $f(x) = f(x + p)$ . La mayoría de las veces concluyen en ambos casos que las funciones son periódicas ya que pueden identificar una  $p$  tal que la función fuera igual.

Este es un extracto de la respuesta de uno de ellos:



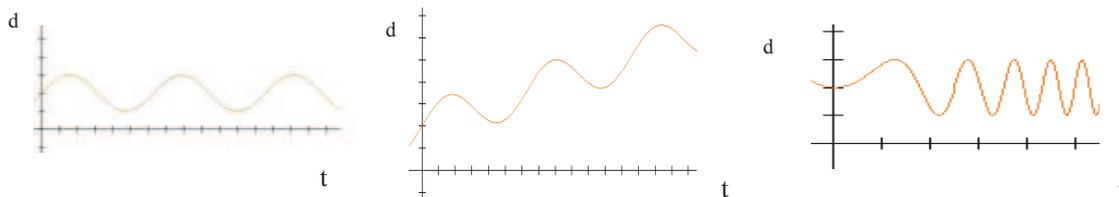
*Puedo identificar una  $p$  tal que la función sea igual y, por lo tanto, ambas son periódicas*

Luego, les pedimos obtener la gráfica de la función derivada y, nuevamente, analizar el cumplimiento o no de la propiedad periódica. En ambos casos, algunos con criterios gráficos, hallan la gráfica de la derivada, y concluyen que ambas son periódicas.

En este contexto gráfico, podemos hacer evidente que el comportamiento de una función tiene dos componentes: el comportamiento en el eje  $X$  y el comportamiento en el eje  $Y$ ; esta distinción es fundamental para distinguir entre algo periódico y algo que “no es verdaderamente periódico” (Buendía, 2004b). Es importante hacer notar que es común que la gráfica de la función  $f(x) = x + \text{sen}x$  se le clasifique como periódica o, al menos con cierta periodicidad, ya que guarda una repetición regular en el eje  $X$ . Y esa es una característica que los estudiantes utilizan para obtener la gráfica de la derivada, manteniendo así su comportamiento periódico.

Muchas veces al enfrentar la propiedad periódica desde un contexto gráfico, se considera el comportamiento de repetición puntual y sin analizar, de manera global, el comportamiento presente en cada una de las coordenadas, o en el mejor de los casos el análisis hecho, se centra en la indagación del comportamiento de las abscisas dejando sin sentido el resto: se hace énfasis únicamente en el comportamiento de la variable independiente dejando de lado el de la imagen. Estos elementos de corte gráfico también nos permiten sostener la importancia de estudiar los aspectos periódicos en la relación de una función y sus derivadas.

Por otra parte, desde un contexto físico consideremos el movimiento de una partícula que se mueve en un ir y venir sobre una línea recta, variando su velocidad y su aceleración. En Buendía, (2004b) se da evidencia de la problemática acerca de lo periódico: *La asociación de lo periódico con cualquier tipo de repetición*. Propone gráficas que representan movimientos, en las que la repetición es una característica presente en todas y se manifiesta a través de tres comportamientos distintos. Esta distinción se basa en la diferenciación entre el comportamiento presente en el tiempo (eje  $x$ ) y aquél que se presenta en la distancia (eje  $y$ ).



Cuando se ha explorado la relación  $f - f'$  en este contexto hemos usado movimientos de objetos. Nos topamos que al considerar la modelación de un movimiento a través de la función  $f(x) = x + \text{sen}x$ , resultaría que mientras el movimiento no es periódico, su velocidad  $f'(x)$  sí lo sería. Sin embargo las respuestas que hemos obtenido es: el movimiento es periódico y creemos que el argumento usado está basado en el comportamiento de la velocidad del objeto.

Así nos enfrentamos a ciertos tipos de movimientos que no son periódicos pero que sí mantienen algunas de sus características periódicas, como la velocidad y por consecuencia, su aceleración.

Así en un futuro para nuestro trabajo de investigación, creemos que estudiar la relación  $f-f'$  en un escenarios periódicos en el tránsito de los contextos gráfico, físico y analítico nos ayudará encontrar elementos socioepistemológicos para resignificar dicha relación debido a que la periodicidad es un concepto que transita entre diferentes disciplinas escolares, y dar cuenta, que no puede quedar relegada al aspecto analítico. El comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un fenómeno descrito desde un contexto físico y gráfico.

### **Algunos antecedentes**

Estudios sobre la derivada y su primitiva en el marco de la matemática educativa reportan que los estudiantes son capaces de derivar una función pero no pueden reconocer en cierto problema la necesidad de una derivación o de reconocer la derivada de una función como otra nueva función y, por lo tanto, susceptible de volver a derivar (Cantoral 1997). González (1999) señala que el concepto de derivada se construye sólo si transita entre las variaciones sucesivas, es decir cuando se puede establecer un uso simultaneo entre la función y sus derivada.

Cantoral y Mirón (2000) propone como objetivo, analizar el efecto del aprendizaje con respecto a las relaciones entre la función y su derivada a la luz del uso de los graficadores, tales como las calculadoras. Para lograr este objetivo diseñó una ingeniería didáctica donde, además de las tradicionales componentes epistemológicas, cognitiva y didáctica, se incorpora otra que tiene que ver con el aspecto social. Las relaciones que en este trabajo se buscan establecer entre  $f - f'$ , básicamente se pueden clasificar en: a) dada  $f$ , de algún modo, se busca obtener  $f'$ ; b) dotar a  $f'$  de un significado que le permita ser entendida a su vez como una nueva función; c) dada  $f'$ , de algún modo, se busca construir  $f$ .

Dolores (1998) aborda el problema la escasa comprensión de las ideas y conceptos variacionales que subyacen en el concepto de derivada. Parte de la hipótesis de que el desarrollo de ideas variacionales puede favorecer una mejor comprensión de este concepto; propone.

En las investigaciones que hemos revisado de la relación  $f - f'$ , no hemos encontrado una que la estudien en el marco de las funciones con comportamientos periódicos. Creemos que estudiar lo periódico en la relación  $f - f'$  nos brindara marcos de referencia para obtener significados funcionales en ella.

## Comentarios finales

Al considerar exclusivamente un contexto analítico, una función se cataloga como periódica o no periódica haciendo uso de la definición; esto es: una función es periódica si cumple la igualdad  $f(x) = f(x + p)$  para todo  $x$  que pertenezca al dominio, sin aludir al uso de herramientas de corte social que reconocen al individuo en un determinado contexto sociocultural – no exclusivamente matemático. Estas herramientas de corte social, como el comportamiento de una función, enriquecen la argumentación alrededor de lo periódico y se resignifica este aspecto de lo periódico de las funciones.

Creemos que al estudiar aspectos socioepistemológicos de la relación  $f - f'$  se favorece un tránsito entre los diferentes contextos que ayudará a resignificar la relación de una función y sus derivadas para el caso de lo periódico, de tal manera que no puede quedar relegada al aspecto analítico ya que el comportamiento periódico visto de manera significativa en las funciones y sus derivadas podría dar argumentos para analizar y caracterizar un movimiento desde un contexto físico y gráfico.

## Referencias bibliográficas

- Buendía, G. (2004a). Qué enseñar en Matemáticas: una visión socioepistemológica. *Pakbal. Facultad de Ingeniería Unach*. Año 3, Nov. 2004. Chiapas, México. Páginas 18-23
- Buendía, G. (2004b). Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. Tesis de doctorado publicada. México: Cinvestav.
- Buendía, G. (2005). Prácticas Sociales y Argumentos: El Caso de lo Periódico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18, (pp. 451-456). México.
- Cantoral, R (1997). Matemática Educativa. *Serie: Antologías, número 1. Programa Editorial del Área de Educación Superior*. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, pp. 81-98.
- Cordero, F. (2003). Lo social en el conocimiento matemático: reconstrucción de argumentos y significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 16, Tomo 1, (pp.73-78). México.
- Dolores, C. (1998). El desarrollo de ideas de variación y la derivada en situación escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 11(pp.6-10). Colombia.
- González, R. (1999). La derivada como una organización de las derivadas sucesivas: Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Área de Educación Superior. Cinvestav-IPN.
- Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 3 (3), 265-292
- Spivak, M. (1993). *Calculus*. Editorial Reverté 2ª edición. México.