

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR GENOMETRÍA ANALÍTICA A NIVEL UNIVERSITARIO. ELABORACIÓN DE INSTRUMENTOS PARA SU ANÁLISIS

Virginia Ciccioli y Natalia Sgreccia
 FCEIA-UNR. CONICET.
 ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Argentina

Resumen. En este reporte se comparte el proceso de elaboración de los instrumentos para la recolección de los datos de una investigación que conjuga diversas técnicas y participantes. El trabajo se realiza en el marco de un plan de acción más amplio, de un año de duración y que está iniciando su fase de ejecución. El encuadre teórico y metodológico se basa en la noción de *conocimiento matemático para enseñar (MKT)*, conjugado aquí con las particularidades de la geometría analítica.

Palabras clave: instrumentos, MKT, geometría analítica

Abstract. In this report we share the process of elaboration of instruments for the data recolection of a research that conjugates diverse techniques and participants. The work is made in the context of a wider action plan, which duration is one year and which execution is beginning. The theoretical and methodological frame is based on the notion of *mathematical knowledge for teaching*, regarding with the particularities of the analitical geometry.

Key words: instruments, MKT, analitical geometry

Introducción

El presente trabajo se inscribe en una investigación más amplia, denominada “*Conocimiento matemático para enseñar* geometría analítica a nivel universitario. El caso del Profesorado en Matemática de la FCEIA-UNR”, en el marco de una Beca de Iniciación a la Investigación Científica y Tecnológica (Res.1787/2012) que se encuentra en su fase inicial de ejecución. El interés por el tema emerge ante la reducida investigación educativa acerca de la formación de grado en didáctica de la geometría analítica.

La lectura realizada al momento de los volúmenes del Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (del 22 al 26), de la Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (del 3 al 15) y de la Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN (del 27 al 32) arroja una importante evidencia de esta vacante. Si bien para la elaboración de los instrumentos se han rescatado algunos aportes, se ha podido observar que ninguno de estos estudios se centra en la formación de docentes en geometría analítica; sino que más bien se focalizan en el nivel secundario. A pesar de ello, es posible observar un común denominador en la mayoría de estas investigaciones: las interpretaciones incorrectas o acotadas de esta rama de la Matemática generan distorsiones en su enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Arellano Cabezas y Okaç (2009), los alumnos del nivel medio superior presentan dificultades en el pasaje del registro gráfico al algebraico en el tratamiento de ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales. Según señalan, esto se debe a la escasa importancia que se le da al uso de las gráficas y a la falta de reinterpretación de los conceptos y procedimientos algebraicos

en los problemas propuestos durante la escolaridad. Los estudiantes sólo son capaces de manejar los conceptos y procedimientos en los contextos en que fueron “aprendidos”. Karrer y Navas Barreiro (2013) también observan dificultades en los estudiantes para realizar las transformaciones de un registro semiótico a otro en contenidos propios de la geometría analítica. Asocian este hecho, por un lado, al tratamiento acotado de tales contenidos en los libros de texto, que priorizan los registros monofuncionales discursivos (como el algebraico) y, por otro lado, a una formación de los docentes de la carrera fuertemente orientada al uso de los mismos.

Guajardo García y López Vera (2009) ofrecen propuestas didácticas para desarrollar el contenido “desigualdades cuadráticas” con el soporte de software para graficar. La potencialidad de este tipo de herramientas, según los autores, también radica en la posibilidad de trabajar en otro registro (geométrico), lo que aporta una nueva mirada de los problemas (resolución de desigualdades cuadráticas) que acarreaban ciertas dificultades en los alumnos al ser tratados únicamente desde el enfoque analítico. De acuerdo con Buendía (2012), las gráficas son fundamentales para el aprendizaje de la geometría analítica. Es necesario conocerlas para lograr su construcción, utilización como modelo e interpretación, y en su enseñanza interviene el profesor en Matemática. En este proceso se involucran la articulación de los elementos semióticos que componen la gráfica, la visualización de la misma en un cierto contexto y las conversiones entre registros semióticos (Duval, 1999).

Ante este panorama, en la investigación interesa analizar la formación que se ofrece en la carrera Profesorado en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario (UNR) para enseñar geometría analítica a nivel universitario. Específicamente se orienta a:

- ❖ Determinar la contribución formativa de la asignatura Geometría I (en la que se enseñan los conocimientos básicos de geometría analítica en la carrera) en la configuración del *conocimiento matemático para enseñar* geometría analítica a nivel universitario.
- ❖ Identificar los modos de activación de los distintos dominios del *conocimiento matemático para enseñar* en estudiantes avanzados de la carrera.
- ❖ Caracterizar la visión de la formación por parte de los egresados del PM para enseñar geometría analítica en el Ciclo Básico de las Ingenierías de la UNR.

En este reporte se comparte el proceso de elaboración de los instrumentos para la recolección de los datos de la investigación, la cual conjuga diversas técnicas y participantes desde un entramado teórico-empírico que le da sustento.

Marco teórico

Sánchez (2011) muestra cinco ejes de relevancia en las investigaciones acerca de la formación de profesores en Matemática: creencias, visiones y concepciones de los profesores; prácticas docentes; conocimiento y habilidades de los profesores; relación entre teoría y práctica; práctica reflexiva. El eje *conocimiento y habilidades de los profesores* se vincula con aquello que debe disponer un docente para generar una buena enseñanza. Shulman (1986) inicia esta línea de investigación sobre la clase de conocimiento requerido por el profesor en la enseñanza de cualquier asignatura. Ball, Thames y Phelps (2008) orientan dicha línea hacia la Matemática y proponen un conjunto de seis dominios de *conocimiento matemático para enseñar (MKT)* que han de disponer los profesores (Fig. 1).

La geometría analítica unifica el álgebra y la geometría. Permite analizar las relaciones existentes entre estas ramas de la Matemática y operar con ellas, como consecuencia de la asociación de números con puntos y de ecuaciones con figuras, los cuales sirven como herramienta para la resolución de problemas en áreas como la Ingeniería. Los principales precursores de la geometría analítica fueron Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) y Euler (1707-1783). La geometría analítica proporciona cientos de aplicaciones en diversas áreas del desarrollo de la humanidad. Se utiliza en un conjunto considerable de disciplinas y profesiones, tales como Física, Astronomía, Arquitectura, Arqueología, Cartografía, Topografía, Sociología, Marketing, Economía; sin olvidar numerosas aplicaciones tales como los Sistemas de Posicionamiento Global (GPS). Es por ello que la geometría analítica está presente en la formación básica de profesionales de diversos campos del mundo entero.

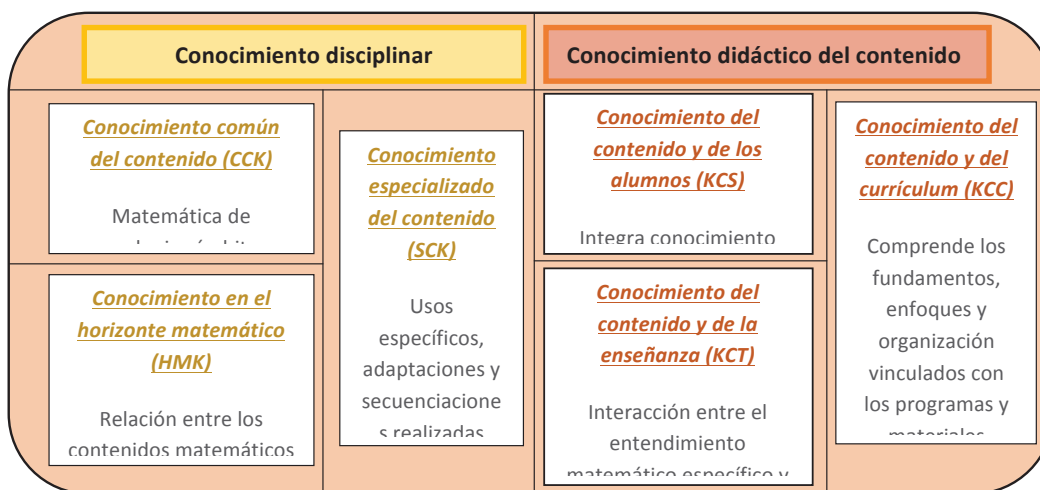


Figura 1. Dominios del MKT (Ball et al., 2008)

Metodología de la investigación

La metodología empleada asume un enfoque eminentemente cualitativo en su contexto natural (Taylor y Bogdan, 1987), con algunos aportes cuantitativos. El enfoque cualitativo en investigaciones que estudian fenómenos didácticos se considera pertinente porque la educación tiene que ver con acciones humanas (Contreras, 1994).

El diseño es particularista (Rodríguez Gómez, Gil Flores y García Jiménez, 1999) y responde al de un estudio de caso: el PM de la UNR, centrado en la configuración del MKT geometría analítica a nivel universitario, de acuerdo a los objetivos de la investigación.

El alcance de la investigación es principalmente descriptivo, ya que busca especificar las características y los perfiles importantes del caso en estudio de acuerdo a las categorías de análisis (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). La investigación es de tipo empírica, porque recoge información de fenómenos de la realidad para lograr los objetivos específicos, y transversal, debido a que se recolectan datos con simultaneidad y en instancias puntuales para un cierto fin (Bravin y Pievi, 2008).

El sistema de categorías de análisis está delimitado por los dominios del MKT. Las técnicas de investigación, procurando la triangulación metodológica, son: observación de clases en la asignatura Geometría I; entrevistas semi-estructuradas a los profesores de Geometría I; cuestionarios abiertos a estudiantes avanzados de la carrera; grupos de discusión con egresados del PM que trabajan en Ingeniería de la UNR.

Resultados

Se procede a elaborar los instrumentos de recolección de la información durante el primer semestre de 2013 de manera tal de relacionar convenientemente las categorías de análisis, los objetivos de la investigación, las técnicas y los participantes a quienes van dirigidos. A continuación se muestran los ejes de interés que guían los protocolos de los instrumentos. Se consigna, entre paréntesis, el dominio del MKT que se le asocia desde su formulación.

❖ Observaciones de clases en la asignatura Geometría I.

Se pretende analizar no sólo cómo se ponen en juego los distintos dominios del MKT en los docentes de la materia, sino también cómo, desde la enseñanza disciplinar, se favorece la activación de dichos dominios en los futuros docentes en lo relativo a la geometría analítica.

1) *Con relación al contenido de la clase: contenidos y habilidades involucrados (CCK), secuenciación del contenido (SCK), temporización en cuanto al programa (KCC), registros semióticos de representación que se promueven (SCK), vinculaciones matemáticas más allá del contenido en tratamiento (HMK), emergentes.*

2) *Con relación al docente: estrategias didácticas implementadas (KCT), tipos de actividades (SCK), atención a las particularidades del alumnado (KCS), bibliografía considerada (KCC), intencionalidad didáctica del empleo de diversos recursos (KCT), seguridad conceptual (CCK), seguridad en la planificación, organización, manejo y monitoreo de la clase (KCT), valoración de las intervenciones del alumnado y trabajo sobre el error (KCT, SCK), lógica en la secuenciación de contenidos (KCC), organización temporal de la clase (KCT), promoción de la vinculación con otras disciplinas o con hechos cotidianos (HMK), vinculación de los contenidos de la clase con conocimientos previos (SCK), evaluación (tipo, frecuencia e instrumentos) (SCK).*

3) *Relativo a la relación alumnos-docente-contenido: relación docente-alumno, grado de compromiso en el desempeño de la tarea docente y en la enseñanza de contenidos (SCK, KCT, KCC, KCS), nivel de involucramiento en problemáticas generales de la materia y de la carrera (KCS, KCC, KCT).*

❖ **Entrevistas semi-estructuradas a docentes de Geometría I.**

Este instrumento se elabora con el propósito de fundamentar, desde la visión de los propios docentes de la materia, aquellos aspectos observados en las clases. Se intenta develar la mirada del docente como formador de formadores y las implicancias que esa enseñanza tiene, a su forma de ver, en el aprendizaje de los alumnos (futuros docentes); todo ello atravesado por la disciplina.

1) *¿Por qué considera que es importante la geometría analítica en la formación de un futuro profesor en Matemática? ¿Qué habilidades o destrezas cree que aporta el aprendizaje de esta asignatura que no aportan (o lo hacen en menor medida) otras ramas de la Matemática? (CCK, SCK, HMK).*

2) *¿En qué momentos del desarrollo de la asignatura considera que se hace explícita la conexión entre el álgebra y la geometría? (CCK, HMK, SCK) ¿Cómo desarrolla este “ida y vuelta” en sus clases? (KCT) ¿Qué importancia relativa le da a estos momentos o situaciones específicas? (KCC).*

3) *¿Qué errores o dificultades prevé en los alumnos con relación a la internalización de los conocimientos en cuestión? (KCS) ¿Con qué tipo de obstáculos los asocia? ¿Cómo afronta estas dificultades o errores durante las clases? (HMK, KCS, KCT, SCK).*

4) *La argumentación es una de las habilidades que se pretende desarrollar en los estudiantes del PM y que se encuentra entre los niveles más altos de razonamiento en la categorización propuesta por Van Hiele. Si bien esta habilidad viene siendo desarrollada en los alumnos a lo largo de su escolaridad secundaria, en el nivel superior comienza a exigirse una mayor formalidad debido a su maduración cognitiva. ¿Qué actividades se proponen desde la cátedra para fomentar la formalización en la argumentación en los contenidos propios de la geometría analítica? (SCK, KCS).*

5) La “monumentalización del saber” es un término introducido por Chevallard para hacer referencia a aquellas situaciones de enseñanza en las que adquiere mayor importancia la figura del docente y donde los alumnos son espectadores de un saber transmitido por el docente. ¿En qué medida se hacen evidentes este tipo de situaciones en sus clases? ¿Considera que es un modelo de enseñanza apropiado para este nivel? ¿Y para otros niveles? ¿Por qué? (SCK).

6) ¿Cuáles considera que son las fortalezas y debilidades en su práctica pedagógica en la asignatura? (KCT, KCS, KCC).

❖ Cuestionarios abiertos a estudiantes avanzados de la carrera.

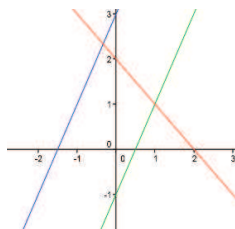
Se aplican a estudiantes avanzados de la carrera, luego de haber transitado casi la totalidad de la misma. Cada actividad se relaciona con alguno(s) de los dominios con el objetivo de, a partir de sus respuestas, develar el grado de conocimiento adquirido en la carrera.

1) Dada la siguiente actividad: “Hallar la ecuación de la recta que interseca al eje y en el punto de coordenadas (0;4) y al eje x en el punto (-2;0)”, analice si la resolución presentada a continuación es correcta o no. En caso de ser correcta, identifique los conocimientos puestos en juego. En caso de ser incorrecta, detecte el error (CCK) y ofrezca una explicación acerca de los posibles motivos del mismo (SCK).

“Intersección con el eje y: (0;4) $\rightarrow h=4$

Intersección con el eje x: (-2;0) $\rightarrow m=-2$

La ecuación de la recta buscada es $y = -2.x + 4$ ”.

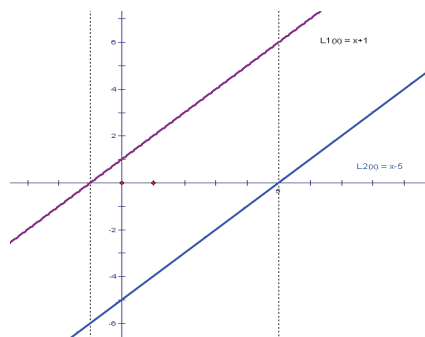


2) a) Escriba las ecuaciones correspondientes a la siguiente gráfica y resuelva el sistema de ecuaciones asociado, gráfica y analíticamente (CCK). ¿Cómo explicaría a un alumno de nivel universitario la conexión entre los resultados obtenidos en la resolución gráfica y en la resolución analítica? (esboce una explicación como si estuviese desarrollando este contenido en una clase). ¿A qué registros semióticos de representación considera que debe recurrirse para resolver esta actividad? (se entiende por registro semiótico de representación al sistema de representación relativo a un sistema particular de signos: el lenguaje coloquial, la escritura algebraica o los gráficos que, además, puede ser convertido en una representación equivalente en otro registro). ¿Considera que existe algún otro registro que pueda ser utilizado en el tratamiento del contenido “sistemas de ecuaciones”? En caso afirmativo, identifíquelo y proponga una situación en la que deba recurrirse al uso del mismo. En caso negativo, explique por qué considera que son suficientes los registros que mencionó más arriba para el desarrollo completo del contenido en cuestión (SCK, KCT).

3) Dada la desigualdad $x^2 - 4x - 5 > 0$, analice si la siguiente resolución es correcta (CCK). En caso de ser incorrecta, corrijala respetando la secuencia de razonamiento propuesta. En caso de ser correcta, proponga otra forma de resolver la desigualdad que también haga uso del registro gráfico. ¿Cuáles son las ventajas de utilizar una u otra forma? (SCK).

“Al factorizar la expresión cuadrática $x^2 - 4x - 5$ tenemos $(x + 1)(x - 5)$.

Luego si consideramos las gráficas de $L1: y = x + 1$, $L2: y = x - 5$, observamos que:



- $L1$ y $L2$ están sobre el eje x si $x > 5$.

Entonces $x + 1 > 0$ y $x - 5 > 0$ si $x > 5$

- $L1$ y $L2$ están bajo el eje x si $x < -1$.

Entonces $x + 1 < 0$ y $x - 5 < 0$ si $x < -1$.

Es decir, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (5; +\infty)$ pero también, $(x + 1)(x - 5) > 0$ si $x \in (-\infty; -1)$.

Por tanto, el conjunto solución de la desigualdad dada es: $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$ ”.

En variadas investigaciones se ha observado que los estudiantes al enfrentarse a una expresión cuadrática, automáticamente resuelven la ecuación asociada. ¿A qué cree que se debe este hecho? ¿Cómo explicaría a un alumno la diferencia entre ecuación cuadrática y desigualdad cuadrática? (KCS, KCT).

4) Para hallar la recta tangente a una circunferencia en un punto dado (teniendo como dato la ecuación de la circunferencia y las coordenadas del punto) se puede recurrir, entre otros, a los dos métodos siguientes (KCC):

* aplicar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado (recurriendo al método de derivación implícita de la ecuación de la circunferencia para obtener la pendiente de dicha recta);

* hallar la ecuación de una recta que pase por el punto dado y que sea perpendicular a la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto dado.

¿Cuál de los procedimientos propuestos considera que evidencia en mayor medida un aprendizaje significativo del contenido “recta tangente a una circunferencia”? Justifique su respuesta (SCK).

5) Al girar una parábola sobre su eje, obtenemos una superficie de revolución llamada paraboloides de una hoja. Estas superficies tienen muchas aplicaciones, principalmente en óptica y electrónica, ya que si un rayo de luz paralelo al eje choca contra el paraboloides, entonces se refleja hacia su foco, e inversamente, si

un rayo sale del foco y choca contra el paraboloide, éste se refleja en la dirección de su eje. Proponga una situación problemática que involucre algún hecho de la realidad en el que deba recurrirse al uso de esta propiedad. ¿Conocía esta propiedad?, ¿la aprendió en la carrera? En caso afirmativo, explícite la materia en que se trató dicha propiedad y explique brevemente cómo fue desarrollada. En caso negativo, ¿considera que es importante para su formación conocerla?, ¿por qué? (HMK, KCC).

❖ Grupos de discusión con ciertos egresados de la carrera.

Se pretenden develar distintos aspectos del conocimiento disciplinar y didáctico del contenido y, si es que existen, diferencias en los modos de enseñar geometría analítica a futuros docentes y a futuros profesionales que utilizan esta disciplina como una herramienta.

1) ¿En qué aspectos se diferencian la geometría analítica que estudiaron en la carrera con la que enseñan a estudiantes de Ingeniería? ¿A qué creen que se deben tales diferencias? Den ejemplos de situaciones vividas en las que se hayan hecho evidentes (CCK, HMK, SCK, KCT, KCC).

2) ¿De qué manera se articulan las actividades propuestas en la práctica de la materia relativas a geometría analítica con situaciones de la vida cotidiana o de la profesión ingenieril? ¿Cómo se trabajan en clase? Den ejemplos (HMK, KCT).

3) ¿En qué situaciones específicas consideran que es “imprescindible” la visualización? ¿De qué manera promueven el desarrollo de dicha habilidad en sus clases? ¿Y qué pueden decir en relación con la diversidad de registros de representación? (SCK, KCT).

4) (Análoga a la pregunta 5 de la entrevista)

5) Si pudiesen planificar la materia a su criterio: ¿qué modificaciones harían en cuanto a: contenidos a desarrollar, metodologías de enseñanza, secuenciación, recursos y materiales didácticos, modos y criterios de evaluación? (KCC, SCK, KCT).

Comentarios finales

A modo de sinopsis se resalta que la investigación se aborda involucrando a:

- 3 tipos de participantes (docentes, estudiantes y egresados del PM);
- 4 técnicas de recolección de datos (observación de clases, entrevistas semi-estructuradas, cuestionarios abiertos y grupos de discusión);
- 20 cuestiones a resolver (4, 6, 5 y 5, respectivamente);
- 6 dominios del MKT, cuya distribución según la técnica empleada se ve en la Tabla I.
-

Dominio	Técnica	Observaciones de clases	Entrevistas semi-estructuradas	Cuestionarios abiertos	Grupos de discusión
	CCK	2	2	3	1
	HMK	3	3	1	2
	SCK	7	5	4	4
	KCS	4	4	1	1
	KCT	7	3	2	3
	KCC	4	2	2	2

Tabla 1. Dominios del MKT que se pretenden activar mediante cada técnica de la investigación

Poder estudiar cómo se activan los distintos dominios del *MKT* a través de la aplicación de distintas técnicas de recolección de la información y del intercambio con distintos participantes permite dar un enfoque práctico al marco teórico que sustenta la investigación así como enriquecer los aspectos teóricos y metodológicos al unificarlos.

Referencias bibliográficas

- Arellano Cabezas, F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 357-368. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24(2), 5-31.
- Contreras, D. (1994). *Enseñanza, Currículum y Profesorado*. Madrid: Akal.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle.
- Guajardo García, E. y López Vera, L. (2009). Las TIC como herramientas cognitivas en el desarrollo de la habilidad de resolución de desigualdades cuadráticas. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1691-1698. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4° ed.). México DF: Mc Graw Hill.
- Karrer M. y Navas Barreiro, S. (2013). Superficies Esféricas: Uma proposta de ensino com o auxílio de um ambiente de geometría dinámica. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 1831-1838. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
- Rodríguez Gómez, G., Gil Flores, J. y García Jiménez, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa*. Sevilla: Aljibe.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*, 5(4), 129-145.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.