GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO: UNA DISCUSIÓN ENTRE LOS ACERCAMIENTOS ESCOLARES TRADICIONALES Y LA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA DE AGNESI (1748)

Renata Ivonne López Sánchez, Marcela Ferrari Escolá
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
renata_ivonne@yahoo.com.mx, marcela_fe@yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: triángulos semejantes, semejanza, progresiones, discurso

Resumen

En este trabajo, hemos iniciado la discusión del papel de la graficación en los textos escolares, particularmente en el caso de los logaritmos. Apoyados en un análisis del discurso matemático escolar, contenido en libros de nivel bachillerato y licenciatura, observamos que la forma de introducir la gráfica de la función logaritmo es realizada mediante: simetría, área bajo la curva o una tabla, lo cual es presentado sin argumentos suficientes que nos permita deducir y entender la construcción de la función logaritmo (López et al., 2003). En general, los logaritmos son presentados en un sentido algorítmico o incluso, axiomático, más que como resultado de un razonamiento o una construcción (Ferrari, 2001). En esta investigación buscamos poner en evidencia la idea de que utilizar una herramienta distinta permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente (López y Ferrari, 2005).

Introducción

El discurso generado en el aula ha sido durante mucho tiempo el eje central de estudio de varios investigadores. En nuestra comunidad podemos mencionar, entre otros, los trabajos de Cantoral (2001), Cordero (2005), Castañeda (2005), quienes establecen al discurso matemático escolar como un importante elemento de reflexión.

Efectivamente, la teoría *socioepistemológica*, aborda desde una perspectiva sociocultural, el problema del estudio de las matemáticas y permite explicar la *naturaleza de un discurso* y mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento a partir de una intencionalidad didáctica, así como aquellos aspectos de socialización de ideas, como parte de un proceso por el que se dé la ampliación del cuerpo teórico de la matemática (Castañeda, 2005).

Nos interesa específicamente atender el problema que plantea la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión cultural. Dado que este saber se ha constituido socialmente, en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos. Llamamos a estos discursos con el término genérico de ***discurso matemático escolar*** (Cantoral, 2001).

Desde nuestra perspectiva coincidimos con Castañeda (2004), respecto a que a través de un estudio del *discurso matemático escolar,* se puede identificar el tratamiento que ofrece el autor del libro de texto a las ideas, a fin de establecer su naturaleza epistemológica e identificar los procedimientos de comunicación de las ideas matemáticas.

En nuestro trabajo, retomamos el análisis socioepistemológico reportado en Ferrari (2001) donde se conformaron tres etapas en las que se permea la construcción social de los logaritmos:

- *Logaritmos como transformación*, definidos y enmarcados en el registro numérico (antes del siglo XVII), aquí se busca facilitar los cálculos que por la magnitud de las cifras demandaban tediosas y complicadas operaciones.

- *Logaritmos como modelizadores*. Se descubren las características de los logaritmos en el contexto geométrico, su asociación con una curva que posee subtangente constante. Se construye su gráfica la cual no fue producto de la tabulación de sus valores.

- *Logaritmos como un objeto teórico*, se les dotó de una definición formal, lejana de la dada por Napier que involucra progresiones. Se les incorpora en el cuerpo teórico matemático como la inversa de la función exponencial, y como aquella función que convierte un producto en una suma.

Ya que consideramos también que todo objeto matemático se consolida al pasar por varias etapas o momentos (Farfán y Ferrari, 2002), y responden a distintos paradigmas que generan discursos específicos.

Continuando las ideas trabajadas por Farfán y Ferrari (2001), específicamente, sobre el segundo momento: *logaritmos como modelizadores*, nos interesó estudiar al papel de la graficación de curvas en los libros de texto.

Para Cordero (2005), las gráficas en los libros de texto pasan por diferentes *funcionamientos* y *formas* desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas, el uso del plano y de los ejes cartesianos, los privilegios del primer cuadrante, los sistemas autónomos del tiempo, las diferencias de usos entre las curvas y las gráficas de las funciones.

Los usos de las gráficas anteriormente vertidos significan que la graficación pueda llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. La graficación en si misma es un tipo de modelación que trasciende y se resignifica transformando el objeto en cuestión. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permite el continuo, en un sentido epistemológico.

Estas ideas nos sirven para atender una problemática originada en ambientes escolares, en particular en nivel bachillerato que se evidencia a nivel superior. Esto es, observar el desarrollo y uso de las gráficas en los libros escolares, actuales y de antaño, para identificar elementos que mas adelante permitan establecer actividades para la introducción de la gráfica de una función.

Libros de texto

Ahora bien, en los últimos años se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis de los manuales escolares como reflejo de la actividad que se realiza en el aula, ya que son los manuales los que determinan en gran medida la práctica educativa más que las disposiciones ministeriales (Sierra, M. et al., 2003).

Actualmente existe todo tipo de análisis de libros de texto, que responden a los requerimientos de cada investigación. En nuestro caso particular realizamos una revisión de libros de nivel medio superior y superior con el objetivo de conocer las argumentaciones con las que se aborda el tema de función logaritmo, específicamente la forma en que se presenta la gráfica de ésta.

Los puntos revisados fueron: el enfoque (prólogo), métodos propuestos para la graficación de curvas, la definición y propiedades, los ejemplos y problemas. Se revisó tanto la forma en que explican la apariencia de la gráfica como el método que utilizan para obtenerla, pasando por los ejemplos de otras funciones así como los ejercicios propuestos para el alumno. Se hizo dicha revisión para evidenciar la forma en que es tratada la gráfica de los logaritmos.

Tras dicha revisión de manera general podemos rescatar tres ideas importantes, una declarar que las imágenes ayudan en la comprensión de los conceptos sin mostrarlo al trabajar con la función en cuestión; segundo, aun cuando en la sección destinada para analizar las propiedades de las funciones al graficarlas no aparece la función logaritmo; y por último, en las tres formas de referirse a la gráfica de la función logaritmo se cae en dar por hecho la continuidad entre los puntos localizados, esto sin mencionar que la imagen siempre se ve terminada, es decir no hay forma en que el lector pueda apreciar la construcción de la gráfica y mucho menos que se percate del sutil crecimiento que hay entre los puntos de las *y*, los más alejados del origen.

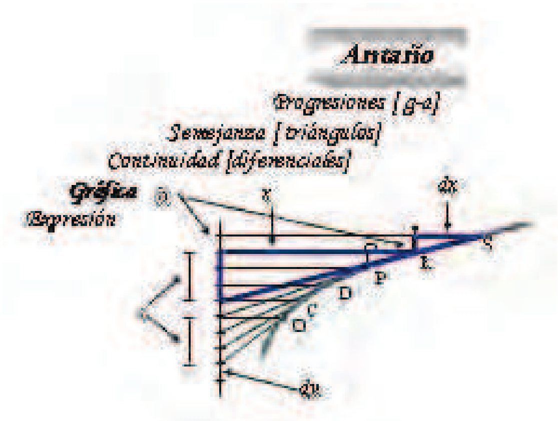
En doce libros, entre libros de Cálculo y Álgebra, encontramos además de tres distintos enfoques, que la forma en que grafican curvas es, principalmente, mediante una tabla de valores y usando los criterios de la primera y segunda derivada, tales formas son utilizadas para cualquier expresión algebraica. Sin embargo, al llegar al tema, que particularmente a esta investigación le interesa, *funciones logarítmicas* nos percatamos de la pobreza de argumentos que explican la obtención de la gráfica de la función logaritmo. En dichos libros de texto la introducción de la gráfica no van más allá de presentarla de las siguientes tres formas: como la unión de algunos puntos dispuestos en una *tabla de valores*, como el *área bajo la curva* 1/t ó simplemente como la inversa de la función exponencial usando *simetría* (López, 2006).

Construcción geométrica de 1748

A la par del análisis de libros de textos actuales se realizó un análisis de una obra, del siglo XVIII, de Maria Agnesi quien preocupada por la difusión de la matemática desde un punto de vista didáctico publica en 1748 el libro "*Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*", el cual consta de dos volúmenes, compuestos por temas como Álgebra, Precálculo, Cálculo Diferencial e Integral, Series infinitas y Ecuaciones Diferenciales.

Agnesi en el capítulo 1, *De las reglas de la integración expresada en forma finita algebraica, o reducir la cuadratura supuesta,* de su libro Instituciones Analíticas. Tercer libro. Del Cálculo Integral, emprende una búsqueda para resolver el problema de integrar una expresión que contiene un exponente negativo, más específicamente, cuando la expresión por integrar es x^{-1}. La respuesta que presenta se centra en la construcción geométrica de la curva llama *Logarítmica.*

Agnesi plantea utilizar la semejanza de triángulos, las diferenciales y las progresiones simultáneas como herramientas de construcción, ya que mediante progresiones y semejanza de triángulos construye la gráfica para luego, con semejanza de triángulos y diferenciales obtener la ecuación de la curva, que es distinta a la forma que existe en las escuelas.

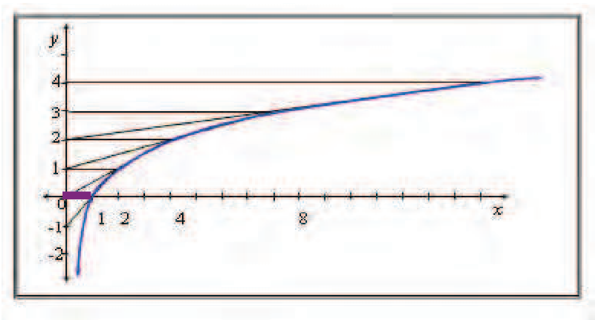


Algunos resultados de la investigación

Tras analizar la construcción propuesta por Agnesi, fue posible ver cualidades que permiten que:

a) por la naturaleza de la construcción y al colocarla en ejes coordenados, después de hacer algunos ajustes, la noción de infinitamente continua se logra al aceptar la existencia de triángulos rectángulos infinitamente pequeños, además que los puntos localizados debajo del eje "*x*" entre 0 y 1 tienen como asíntota al eje de las "*y*".

Una de las decisiones que se tomaron al colocar la construcción en los ejes coordenados fue que la primera línea horizontal (en el primer par de triángulos semejantes) si hizo coincidir con el eje *x* y además de longitud uno, lo cual deja por encima del eje *x* la construcción. La forma de obtener de los puntos entre 0 y 1, que van por debajo del eje es:



i. En el gráfico de la derecha, figura 1, a partir del punto *a* se traza una recta que llegue a *W*, porque de *B* a *W* hay dos unidades,

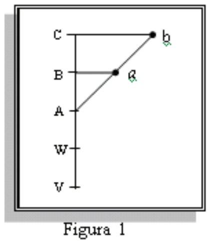


Figura 1

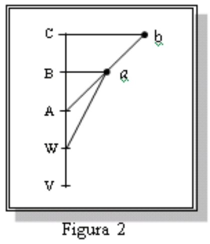


Figura 2

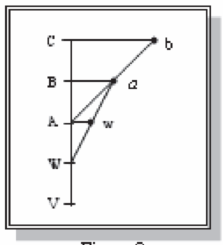


Figura 3

Se traza una perpendicular de *A*, hasta que toque la recta *aW*. Formando con estas líneas, *aW* y *Aw*, el triángulo *aBW* y el triángulo *wAW*, ambos triángulos son semejantes.

ii. Ahora de *w* se traza una recta hasta *V*, desde *A* hasta *V* también hay dos unidades, y una perpendicular en *W*, formando con está el triángulo *vWV* que es semejante al triángulo w*AV*.

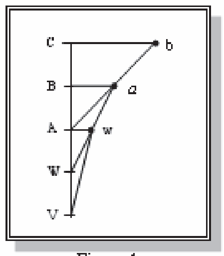
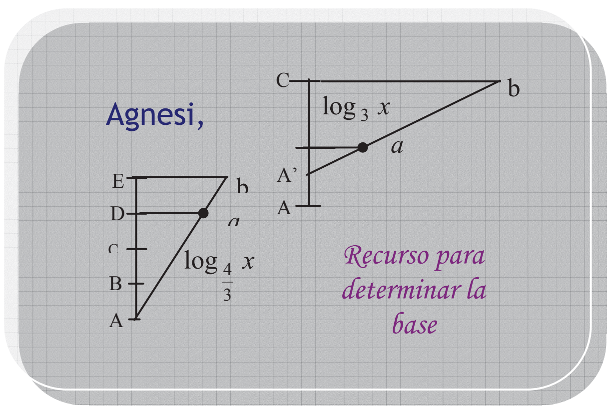


Figura 4

b) al manipular el tamaño de cada segmento involucrado en la construcción y el uso de herramientas actuales sea posible determinar la base de curva trazada.



Al ir analizando las modificaciones que se necesitan en cada una de las diferentes construcciones, nos percatamos que para las curvas en base entera, 3, 4, 5, etc. las divisiones de la recta sobre la cual trazamos los triángulos no son las únicas que se necesitan. Esto es, que cada una de las divisiones, las primeras que son igual a *u*, se tienen que partir en dos, tres, cuatro, etc., según la base que se busca. A diferencia de cuando la base es fraccionaria se mantiene una sola partición sobre la cual, según el procedimiento expuesto por Agnesi, se recorre una o dos unidades, de acuerdo a la elección del primer par de triángulos, para dibujar el siguiente triángulo.

A manera de conclusión

Nuestro propósito ha sido identificar ciertas cualidades en las ideas de Agnesi, es decir, analizar el uso de una herramienta geométrica lo cual podría permitirnos diseñar otra forma para introducir la gráfica de la función logaritmo de manera distinta a la propuesta en los libros de texto. Evidenciamos entonces la contraposición existente entre las herramientas escolares usuales tales como: la terna expresión analítica-tabulación-gráfica así como la bina graficadoras-expresión algebraica; y, aquellas fundamentadas en la construcción de Agnesi (1748) en donde se consideran tres elementos: geometría plana, continuidad y relación entre progresiones aritmética y geométrica.

Lo expuesto en esta investigación pretende contribuir con los esfuerzos realizados por otras investigaciones que al ver obras antiguas buscan herramientas de tipo geométrico que durante un tiempo fueron utilizadas y que pueden ser llevadas nuevamente al aula. Volvamos la vista hacia trabajos interesantes como "*Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italian*" en los que se presentan argumentos gráficos que pueden ser incorporados al discurso escolar a fin de brindar recursos de los cuales se valga el maestro durante el proceso de enseñanza aprendizaje.

Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analítiche ad uso della gioventú italiana*. Libro terzo Del Calcolo Integrale.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada del Politécnico Nacional, México.

Ferrari, M. (2001). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

López, R, Ferrari, M. y García, C. (2003). Propuesta didáctica de la función logaritmo fundamentada en la construcción geométrica de Agnesi. En G. Martínez (Ed.) *Resúmenes, VII Escuela de Invierno y VII Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.* (pp. 64 – 65). México.

López, R. y Ferrari, M. (2005). La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748). En: L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp. 551-558) Vol. 18, Tomo 1. México Clame.

López, R. (2006). *Gráfica de la función logaritmo: Una discusión entre los acercamientos escolares tradicionales y la construcción geométrica de Agnesi (1748)*. Tesis de licenciatura, no publicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.