

LA NOCIÓN DE VARIABLE. UN ESTADO DEL ARTE

Enrique Javier Gómez Otero, Crisólogo Dolores Flores
CICATA- IPN, CIMATE-UAGRO. (México)

ejgo@prodigy.net.mx, cdolores@cimateuagro.org

Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: medio, superior

Palabras clave: análisis, procesos, construcción, variable

Resumen

El presente documento centra su interés en el análisis de investigaciones que acerca de la noción de variable se han realizado. Para realizar el análisis se consideraron los objetivos de la investigación, la metodología utilizada y las condiciones en que fueron realizadas. El análisis de estas investigaciones y sus resultados, forman parte de un trabajo de investigación más amplio, denominado *la construcción de la noción de variable*.

Estado del arte

El objetivo de esta investigación se orienta hacia la investigación de los procesos de la construcción de la noción de variable. Para tener una idea de cómo se ha abordado esta noción, se hizo una investigación y un análisis de las investigaciones realizadas relacionadas al tema. El análisis de estas investigaciones se caracterizó por la identificación de los objetivos que guiaron la investigación, la metodología utilizada, las condiciones en que fueron realizadas y los resultados obtenidos. Las investigaciones analizadas fueron:

Children's understanding of numerical variables, Kuchemann (1980).

Esta investigación tiene como objetivo, conocer cómo los alumnos interpretan los símbolos literales. Para ello, se proporcionó un cuestionario donde se pedía a los alumnos que interpretaran, manipularan y resolvieran expresiones algebraicas representadas por símbolos literales. Al analizar las respuestas encontró seis interpretaciones de estos símbolos (letra evaluada, letra no usada, letra como objeto, letra como incógnita, letra como número generalizado y letra como variable).

Some misconceptions concerning the concept of variable, Rosnick (1981).

El objetivo de esta investigación es investigar las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión del uso de letras en las ecuaciones al trasladar un enunciado verbal a una expresión algebraica. “*Escribe una ecuación, usando las variables S y P para representar el siguiente enunciado: “En esta universidad hay seis veces tanto estudiantes como profesores.” Usa S para el número de estudiantes y P para el número de profesores*” (Rosnick, 1981, pp. 418 y 419). Los resultados obtenidos manifestaron la dificultad que los estudiantes tienen, al trasladar un problema verbal a lenguaje algebraico, *37 % de los alumnos de un grupo de 150 estudiantes que inician ingeniería no fueron capaces de escribir la ecuación correcta.*

On the meaning of variable, Schoenfeld & Arcavi (1988).

Este es un estudio en el se describe un ejercicio reflexivo y estructurado para reexaminar la noción de variable y redescubrir su riqueza y diversidad de significados. El estudio se estructuró en tres partes, el trabajo con diversos grupos (matemáticos, educadores matemáticos, computadores científicos, lingüistas y lógicos) en un ejercicio, como el término se ha usado, se comparan las respuestas, la profundidad, variedad y riqueza del concepto. En la segunda parte se examinaron algunas definiciones de este concepto de la literatura, no sin antes tratar de producir una definición que capturara lo esencial del término variable y por último se proporcionan sugerencias relacionadas a la enseñanza de este concepto surgido del grupo de discusión. Encuentran 10 definiciones de variable que muestran lo multifacético que es este término, lo complejo que es su comprensión por el aspecto simbólico que maneja y los diferentes contextos en los que se aplica, aunado a que el significado de variable es variable (Shoenfeld & Arcavi, 1988, p. 425).

Cognitive processes involved in learning school algebra, Kieran, Booker, Filloy, Vergnaud, & Wheeler (1990).

Este estudio comprende una serie de investigaciones relacionadas al aprendizaje del álgebra escolar. Centra su atención al estudio de los significados que le asocian los estudiantes a los símbolos literales durante el tránsito de la aritmética al álgebra. Este trabajo de investigación aborda tres aspectos, el desarrollo del álgebra desde la perspectiva epistemológica; las continuidades y discontinuidades del álgebra con respecto a la aritmética que se presentan en los estudiantes y el uso de ambientes computacionales en el aprendizaje del álgebra. Una conclusión de los resultados de este estudio sobre las continuidades y discontinuidades entre la aritmética y el álgebra mostraron que, muchos de los errores que cometen los estudiantes son resultados de lo razonable, sin embargo fracasan, en los intentos por usar o adaptar previamente el conocimiento adquirido a una nueva situación.

Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable, Ursini (1996).

El objetivo de esta investigación es propiciar en los alumnos el desarrollo de un potencial para trabajar con distintos usos de la variable, antes de la enseñanza formal del álgebra.

El estudio está basado en actividades que fueron desarrolladas previamente en un ambiente computacional (LOGO) con 34 alumnos de primero de secundaria que no habían recibido aún una enseñanza formal de álgebra. Los resultados obtenidos en el uso de la variable como relación funcional mostraron que los alumnos fueron capaces de determinar intervalos numéricos, hacer registros tabulares, localizar los valores con los cuales había que correr un programa para obtener en la pantalla de la computadora el tamaño máximo o mínimo de una figura y dar una descripción cualitativa del comportamiento global de dos variables interrelacionadas.

Introducing the variable through pattern exploration, English & Warren (1998).

Este trabajo es una propuesta didáctica para la introducción de la noción de variable. El objetivo es revisar la alternativa de aproximación de patrones y destacar las dificultades que pueden presentar a los estudiantes, cuando carecen de habilidades y conocimiento de procesos. La idea es, dado un modelo (gráfico, tabla de datos, etc.), los alumnos mediante la exploración, pueden determinar la regularidad que presenta el modelo haciendo una descripción verbal de su comportamiento, prueban sus hipótesis para una determinada cantidad n de casos y por último, construyen su generalización empleando símbolos algebraicos. Los resultados obtenidos, mostraron que los estudiantes tuvieron grandes dificultades al intentar generalizar los patrones, especialmente cuando trataron de expresarlos en forma algebraica, encontraron más fácil verbalizar sus generalizaciones que registrarlas simbólicamente.

La conceptualización de la variable en la enseñanza media, Trigueros, Ursini & Lozano (2000).

Esta investigación tiene como objeto estudiar la interpretación, simbolización y manipulación que realizan los estudiantes de diferentes niveles (secundaria, preparatoria e inicio de universidad) respecto a la variable en sus distintos usos. Para ello se utilizó un cuestionario que se aplicó a 98 alumnos para explorar la capacidad de interpretar, manipular y simbolizar situaciones que implican los distintos usos del concepto de variable (*incógnita, número general y relación funcional*). Los resultados mostraron que si bien, los usos de la variable están presentes en los cursos de matemáticas, los estudiantes no adquieren la capacidad de interpretarlos, simbolizarlos y manipularlos de manera satisfactoria; lo que impide una comprensión del carácter multifacético de este concepto.

Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study, Carlson, Jacobs, Coe & Larsen (2002).

El propósito de este estudio es desarrollar la noción de razonamiento covariacional y proponer un marco teórico para describir las acciones mentales involucradas en la aplicación del razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan eventos de funciones dinámicas. Para este propósito se pidió a 20 estudiantes que habían terminado el 2º semestre de cálculo con alto rendimiento responder 5 preguntas que implicaban un análisis de aspectos covariacionales de eventos dinámicos (llenado una botella, cambio de temperatura respecto al tiempo, una escalera deslizándose de una pared hacia abajo).

Por razonamiento covariacional se entiende a “las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atienden a las formas en las que ellas cambian entre sí”. Presentan como marco teórico dos tablas, una que contiene la descripción de cinco acciones mentales del razonamiento covariacional en el que se describen las acciones mentales y las conductas asociadas; y otra tabla que describe cinco niveles de razonamiento covariacional. Los resultados obtenidos señalan que los estudiantes tuvieron dificultad en la construcción de imágenes de una razón de cambio continuo, particularmente en la representación e interpretación de una razón creciente y decreciente para una situación física,

como ocurrió en el bosquejo de la gráfica del llenado con agua (a velocidad constante) de una botella y asociar la variable volumen con la variable altura, sólo 5 (25%) de los estudiantes proporcionaron una solución aceptable.

La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria, Juárez (2002).

Este es un estudio exploratorio acerca de la comprensión del concepto de variable en los profesores de matemáticas de secundaria. En el diseño del cuestionario, el análisis y clasificación de las respuestas se utilizó la caracterización de los tres usos de la variable (como incógnita específica, número general y variable en relación funcional) según Trigueros y Ursini. De esta investigación se obtienen evidencias empíricas la cual revelan “*que los profesores de matemáticas de secundaria no tienen un buen manejo de los tres usos de la variable...*” (Juárez, 2002, p. 88). El porcentaje promedio de respuestas correctas a las preguntas del cuestionario fue de 52.7%, lo que indica que los profesores tienen una pobre comprensión del concepto de variable; ningún profesor contestó acertadamente el 100% de las preguntas del cuestionario.

Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior, Vicario (2002).

El objetivo de esta investigación fue, explorar las concepciones que de variable tienen los estudiantes de nivel medio y superior (78 alumnos de secundaria, 81 de bachillerato y 88 principiantes universitarios, haciendo un total de 247). Los resultados de esta investigación muestran que la mayoría de los estudiantes cuestionados reconocen a las variables, si están representadas con las letras x e y . Cuando se trata de la identificación de variables en expresiones analíticas, a los estudiantes se le facilita tal identificación, si en éstas se encuentra presente la letra x , ellos la identifican como *incógnita* o como *variable*. Respecto a la identificación de variables dadas varias gráficas cartesianas, en particular la gráfica de una función cuya representación es una paralela al eje de las x , los estudiantes dicen que cambia la x y la y no cambia, sin embargo cuando se tiene una gráfica con los elementos contrarios (la recta paralela al eje y) las respuestas varían. Los resultados de esta investigación mostraron la escasa presencia de la idea de variable concebida como magnitud, es decir asociada a una representación geométrica (longitud, área, volumen). Se tiene una concepción de variable asociada a las literales y afloran concepciones alternativas (las que difieren de las aceptables) en el plano gráfico y conjuntista al plantear situaciones de variación.

Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?, Fujii (2004).

Esta investigación trata de las dificultades que los estudiantes tienen acerca de la comprensión del uso de expresiones simbólicas en la asignatura del álgebra en la escuela secundaria, para lo cual propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética mediante el uso de expresiones numéricas generalizables. La investigación está dividida en dos

aspectos, en el primero se hace un análisis de los resultados de investigaciones sobre la comprensión de los símbolos literales por parte de los estudiantes, del cual se obtiene que muchos de los estudiantes de secundaria parecen tener una muy pobre comprensión de lo que los símbolos literales denotan y cómo pueden ser tratados en expresiones matemáticas. El segundo aspecto, un intento es realizado para mostrar como el currículum de la escuela primaria puede ofrecer mejores oportunidades a los niños para pensar algebraicamente. En la comprensión de los estudiantes acerca de los símbolos literales, identifica dos tipos. *Tipo A* para estudiantes donde “la misma letra representa el mismo número” y “diferentes letras representan diferentes números”. *Tipo B* para estudiantes donde “todo suma 12” y “todo suma 16”, parecen ignorar diferencias en las letras y considerar que las letras pueden representar cualquier número. Por otro lado el autor propone la creación de un puente entre los inicios del álgebra y la aritmética introduciendo el uso de los números como cuasi-variables, por esta expresión se entiende un enunciado numérico o grupo de enunciados numéricos que indican una relación matemática subyacente la cual permanece cierta para cualquiera de los números que sean usados, por ejemplo $78 - 49 + 49 = 78$.

What are these things called variables?, Wagner (1983).

En este estudio se describen algunas reflexiones acerca de los problemas que tienen los estudiantes que inician el estudio del álgebra con símbolos literales o variables. Los símbolos literales son fáciles de usar pero difíciles de entender, porque los símbolos literarios tienen características similares a los numerales y a las palabras, por lo cual los estudiantes pueden concebirlos erróneamente y pensar que se trata de una nueva notación.

En particular, establece dos características de los símbolos literales, como números y como letras y las diferencias existentes, es decir, los símbolos literales pueden representar números y letras. La letra como número, se pueden mencionar los casos de π y e , que no tienen una representación digital simple (Wagner, 1983, p. 471). Los símbolos literales como letras, para este caso se establecen dos situaciones, la letra que pertenece a un sistema alfabético para formar palabras para poder comunicarse en forma escrita y la letra que se usa convencionalmente en las matemáticas para designar un número específico o un conjunto indeterminado de valores con los cuales es posible operar. Una diferencia que se le dificulta entender a los alumnos que se inician en la asignatura del álgebra, es la relación entre los números y las letras, los números representan un valor único y las letras pueden representar simultáneamente diferentes números, a esto nos referimos cuando llamamos variables a los símbolos literarios, tal es el caso de “... $0 < n < 20$ ó $y = 3x + 2$, donde n puede tomar números mayores que 0, pero menores que 20; y el número de y dependerá del número que se le asigne a x , está propiedad de representación simultánea se refiere cuando los símbolos literales se llaman variables...” (Warner, 1983, p. 471). El autor sugiere a los profesores que introduzcan las ideas gradualmente de los diferentes usos de los símbolos literales, por ejemplo, en los primeros grados, cuando usamos P para nombrar un punto o N para representar un número, podemos decir que estas letras son como abreviaciones de las palabras. Más tarde, cuando usamos letras arbitrarias como etiquetas, podemos explicar a los alumnos que estas letras son como nombres para cosas. Cuando comenzamos a usar letras arbitrarias en contextos numéricos, deberemos mencionar que no hay conexión entre el orden alfabético y el orden numérico.

Nuestro trabajo de investigación

Es de mencionar que las investigaciones llevadas a cabo en situación escolar, la noción de variable ya tiene existencia en forma de símbolo y que después de cierto proceso de enseñanza se le asocian diferentes usos, tal es el caso de la variable como número generalizado. El presente trabajo de investigación a diferencia de las investigaciones anteriores que parten del símbolo para realizar sus conjeturas, el nuestro tiene como propósito el estudio de los procesos que originan la construcción de la noción de variable en niños pequeños, esta es otra diferencia ya que las investigaciones mencionadas se han realizado con niños de mayor edad. Pretendemos investigar la noción de variable desde un punto de vista relacional, es decir presumimos que la noción de variable no se construye de manera independiente, sino que para formar esta noción, es necesario relacionar al menos dos objetos cambiantes, donde en la mayoría de los casos uno de ellos es el tiempo.

Referencias bibliográficas

- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. & Hsu, E (2002). Applying Covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*. 33(5), 352-378.
- English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher*. 91 (2), 166-170.
- Fujii, T. (2004). *Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand?*. [En línea] Disponible en: <http://onlinedb.terc.edu/PME2003/PDF/Plen5fujii.pdf>
- Juárez, J. (2002). *La comprensión del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.
- Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G. & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Neshier & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, USA.: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Kuchemann, D. (1980). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school*. 7(4), 23-26
- Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *The mathematics teacher*. 74 (6), 418-420.
- Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics teacher*. 81 (6), 420-427.
- Trigueros, M., Ursini, S. & Lozano, D. (2000). La conceptualización de la variable en la enseñanza media. *Educación matemática*. 12 (2), 27-48.
- Ursini, S. (1996). Creación de un potencial para trabajar con la noción de variable. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 423-455), Grupo Editorial Iberoamérica, México.
- Vicario, M. (2002). *Un estudio sobre la noción de variable en estudiantes de nivel medio y superior*. Tesis de licenciatura no publicada, FM-UAG, México.
- Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *The mathematics teacher*. 76 (7), 474-479.