NIVELES DE CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE ALGUNOS SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

María Laura Distéfano, María Andrea Aznar y Marcel David Pochulu
Universidad Nacional de Mar del Plata Argentina
Universidad Nacional de Villa María
mldistefano@fi.mdp.edu.ar, maznar@fi.mdp.edu.ar, marcelpochulu@hotmail.com

Resumen. Este trabajo tiene por objetivo determinar niveles alcanzados por estudiantes en la construcción de significado para algunos símbolos del registro algebraico. Se diseñó un instrumento que fue administrado a estudiantes de primer año de carreras de Ingeniería, Bioquímica, Matemática y Biología de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. El marco teórico que sustenta este análisis es el Enfoque Ontosemiótico. Se definieron algunas funciones semióticas involucradas en este proceso de significación. Los datos relevados ubican a los alumnos en un nivel simbólico que no sería adecuado para permitir una construcción de conocimiento apropiado de algunos objetos matemáticos.

Palabras clave: significado, símbolos, funciones semióticas

Abstract. This paper aims to determine levels achieved by students in the construction of meaning for some symbols in algebraic register. An instrument was designed and administered to first-year students of Engineering careers, Biochemistry, Mathematics and Biology in Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina. The theoretical framework for the analysis is the Onto-Semiotic Approach. Some of the semiotic functions involved in this process of signification were defined. The data surveyed show the students located at a symbolic level that would be inappropriate to allow the construction of proper knowledge of some mathematical objects.

Key words: meaning, symbols, semiotic functions

Introducción

El trabajo tiene por objetivo determinar niveles alcanzados por estudiantes que cursan Matemática en la Universidad, en la construcción de significado para algunos símbolos que con frecuencia son utilizados en el registro algebraico. En particular, se consideraron las representaciones que involucran los símbolos de pertenencia, inclusión, conjunción, disyunción y cuantificadores que están presentes en las prácticas matemáticas que realizaron los estudiantes.

El marco teórico y metodológico que sustenta este trabajo es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática (EOS) de Godino, Batanero y Font (2009).

Marco Teórico

Para el EOS, una *práctica matemática* se la define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009). A partir de este constructo surge la noción de *significado*, definido como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). La falta de concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores (personas o instituciones) que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, generan diferencias que dan lugar, en términos del EOS, a un *conflicto semiótico*.

El significado está conformado por un conjunto de *funciones semióticas*, cada una de las cuales asigna a una expresión un contenido, mediante un cierto criterio o regla de correspondencia establecido por un sujeto. Este contenido puede ser un término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico, una situación problema, un concepto o definición, una acción u operación, algoritmo o procedimiento, una argumentación, etc. (Godino, Batanero y Font, 2009).

Antecedentes

La adquisición del lenguaje simbólico matemático ha sido abordada por distintos autores, desde diversas líneas teóricas que abarcan perspectivas psicológicas, enfoques lingüísticos y aspectos didácticos (Hiebert, 1988; Pimm, 1990; Kaput, 1991; Rojano, 1994; Arcavi, 2007; Font, 2001; Alcalá, 2002; Socas, 2007). En todos los casos se destaca la relevancia del dominio del sistema simbólico matemático, su implicancia en la capacidad de resolver tareas problemáticas de un determinado nivel y en la posibilidad de expresar desarrollos y resultados.

En la mayoría de las publicaciones el interés está centrado en los primeros niveles de la educación. Son escasos los antecedentes de estudios realizados en el nivel superior. Entre ellos se puede citar los textos de Camós y Rodríguez (2009) y de Colombano, Formica y Camós (2012), quienes centran su investigación en la exploración y tipificación que los docentes hacen de los lenguajes natural y simbólico al enseñar los conceptos de límite, continuidad y derivabilidad, revelando como problemática la escasa atención que los docentes dan a la conversión entre registros y al uso simultáneo de ambos lenguajes. Distéfano, Urquijo y González (2010), presentan una experiencia de enseñanza para mejorar las habilidades en el registro simbólico con estudiantes ingresantes a las carreras de Profesorado y Licenciatura en Matemática. Lacués Apud (2011) también refiere una experiencia de enseñanza de sistemas matemáticos de símbolos, con alumnos ingresantes a carreras de Ingeniería. En estos dos últimos casos se obtuvo una evaluación positiva de la intervención educativa y se concluye que es posible promover una mayor competencia en los estudiantes en relación con la utilización de símbolos matemáticos.

Metodología

Para analizar el significado que le otorgan los estudiantes a los símbolos que fueron foco de análisis se diseñó un instrumento partiendo de la idea de que el significado de un símbolo está ligado a tres elementos: su identificación, la estructura semiótica de las expresiones en las que está presente y el valor de verdad de las mismas.

En dicho instrumento se propusieron actividades de lectura y escritura de expresiones simbólicas –conversiones entre los registros coloquial y simbólico algebraico– y la asignación de valores de verdad a expresiones representadas en ambos registros. Este instrumento se administró a 100 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado y Licenciatura en Matemática y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Los datos fueron relevados, en cada caso, a mediados del curso de Álgebra.

El análisis de las producciones escritas de los estudiantes se realizó teniendo en cuenta el constructo función semiótica. Se determinaron tres funciones semióticas presentes en el proceso de significación de todos los símbolos analizados.

1. La primera de ellas (F_1) vincula la expresión del símbolo con su expresión coloquial o denominación.
2. La segunda (F_2) se establece entre la denominación mencionada y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por ellos.
3. La tercera función semiótica (F_3), es la que relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

Como ejemplo se presentan en la Figura 1 estas funciones semióticas para el caso particular del símbolo de pertenencia.

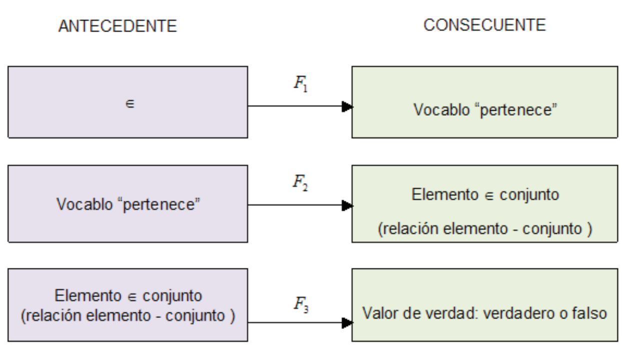

Figura 1. Funciones semióticas para el símbolo de pertenencia

Se analizaron las producciones escritas tomando en cuenta si se evidenció la construcción de cada una de las funciones involucradas en cada ítem.

Posteriormente a la administración del instrumento, se realizaron entrevistas semiestructuradas a algunos de los estudiantes evaluados de cada carrera, complementando y profundizando la información relevada.

Resultados

Para hacer una descripción numérica de los resultados, en cada ítem se discriminaron las funciones semióticas involucradas, asignando en cada caso un 1 o un 0 según se evidenciara que el estudiante la hubiera establecido o no, respectivamente.

Se sumaron los puntajes de las funciones semióticas establecidas en cada ítem, agrupándolos por símbolo. Se dividió esa suma por la cantidad de funciones semióticas involucradas, obteniéndose así una proporción de "establecimiento de funciones semióticas" de cada símbolo.

Asimismo, para tener una idea del desempeño global de cada estudiante en la totalidad de los símbolos, se calculó la proporción de funciones semióticas establecidas en total.

Las proporciones obtenidas se clasificaron en tres categorías: menos del 40 por ciento de las funciones semióticas involucradas; entre el 40 y el 70 por ciento y más del 70 por ciento. En la Tabla 1, se exponen las frecuencias de estudiantes en cada categoría para cada símbolo evaluado, como así también, para la totalidad de los símbolos.

Dado que las proposiciones evaluadas son atómicas o moleculares muy simples, se considera que un alumno manifiesta un significado personal declarado ADECUADO, para cada símbolo, si la proporción de funciones semióticas que estableció supera el 70%. En los casos en que la proporción fluctúa entre el 40% y el 70% se lo clasificará como nivel PARCIALMENTE ADECUADO y, con una proporción menor al 40% INADECUADO.

Tabla 1. Frecuencias de estudiantes en cada categoría para cada símbolo y para la totalidad de los símbolos evaluados.

Símbolos analizados	Individualmente						En forma conjunta
Categorías de proporciones de FS establecidas	$\in$	$\subset$	$\forall$	$\exists$	$\wedge$	$\vee$	
INADECUADO	0%	50%	4%	11%	15%	32%	4%
PARCIALMENTE ADECUADO	14%	21%	47%	26%	53%	31%	59%
ADECUADO	86%	29%	49%	63%	32%	37%	37%

En base a esta consideración y observando la Tabla 1 puede señalarse:

- ❖ Únicamente en los casos del símbolo de pertenencia y del cuantificador existencial, más de la mitad de los alumnos evaluados, manifiestan una construcción adecuada de su significado.
- ❖ En el caso del cuantificador universal aproximadamente la mitad de los alumnos evidenció un nivel adecuado de significación.

- Es notable que la mitad de los alumnos no puedan establecer ni siquiera el 40% de las funciones semióticas asociadas al símbolo de inclusión, es decir se ubican en un nivel inadecuado. Esto podría deberse a que, en la mayoría de las carreras evaluadas, las prácticas matemáticas de uso de este símbolo son poco frecuentes.

- En los casos de la conjunción y la disyunción también es llamativa la alta frecuencia de estudiantes con dificultades en la significación de estos símbolos a pesar de las numerosas prácticas matemáticas que los involucran.

- En relación a la columna correspondiente a la Totalidad de los símbolos evaluados, es notable que sólo 37 de los alumnos evaluados manifiestan tener un nivel de desempeño simbólico adecuado.

Es notable la frecuencia, con la que se presentaron algunos errores, asociados a la función semiótica F_2 en tareas de lectura, manifestados al aceptar, como “bien escrita” algunas expresiones:

- El 49% de los estudiantes aceptó como bien escrita la expresión $3 \subset \mathbb{Z}$ y el 59% o hizo con la expresión $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$. Estas situaciones podrían deberse a la conjunción de distintas causas. Por un lado, el desconocimiento de las formas de notación conjuntista. Si bien el tema conjuntos fue eliminado de la currícula de la escuela media, en el nivel superior no se lo aborda como tema de enseñanza pero sí se lo aplica. Por otra parte, la confusión entre el uso coloquial del vocablo “incluido” como sinónimo de “perteneciente”, que trasladan al ámbito de uso matemático utilizándolos indistintamente.

- El 73% de los estudiantes señaló como bien escrita la expresión $-5 \wedge 4 \in \mathbb{R}$. Esto estaría revelando un “uso coloquial” del símbolo de conjunción utilizado como simple codificación del vocablo “y”, mostrando que únicamente se ha establecido la función F1.

- La expresión $\forall \mathbb{N} \quad \mathbb{N}>0$ fue indicada como correctamente escrita por el 58%. Esto, en principio, evidencia el desconocimiento de las reglas de formación de expresiones cuantificadas y, además, podría estar causado por una asociación, símbolo a símbolo, con las componentes de la proposición “todos los naturales son positivos”.

En la tabla 2 se muestran algunos ejemplos de errores asociados a falencias en la función F_2 en tareas de escritura.

Tabla2. Errores en las producciones de los alumnos asociados a la función semiótica F_2

Ejemplos de errores en las producciones de los alumnos	Descripción del error
Alumno 62: $3 \in D$; $D=[1;6]$ $3 \subset D$; $D=[1;10]$ Alumno 2: $2 \in \mathbb{N}$ $\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$	En las producciones de estos dos estudiantes se manifiesta un conflicto semiótico de tipo cognitivo que se produce al asignar el mismo significado a los símbolos de pertenencia e inclusión.
Alumno5 $\forall x \in \mathbb{N} - \{1\}$ $\exists x / x^2+5=0$ Alumno 1 $\forall K \in \mathbb{R}$ (para todo K que pertenece a los Num. Reale. $\exists x \in \mathbb{N} / x>0$	En ambos ejemplo se puede apreciar la diferencia en el nivel del manejo de la sintaxis asociada a los cuantificadores. Se observa una mejor escritura de las expresiones en las que figura el cuantificador existencial en tanto que, al ejemplificar el uso del cuantificador universal, ambos alumnos, escriben una expresión que no es proposición.
Alumno 40 $\forall x \in \mathbb{N} [p \Rightarrow q \wedge r]$ $\exists x \in \mathbb{Z} [p \Rightarrow q \vee r]$	En este caso, el estudiante no vincula la variable cuantificada con un esquema proposicional que la contenga.
Alumno 20 $4 \wedge 5 \in \mathbb{N}$ $4 \vee 5 \in \mathbb{Z}$	Las apariciones de este error fueron detectadas en numerosas producciones. Esto estaría revelando, también en tareas de escritura, un "uso coloquial" del símbolo de conjunción utilizado como simple codificación del vocablo "y".

Respecto de la función F_3 son interesantes de mencionar los siguientes errores hallados:

El alumno, cuya producción en una tarea de lectura se muestra en la Figura 2, pudo convertir al lenguaje coloquial la proposición en la que el cuantificador universal está presente de un modo tácito. Sin embargo, no tiene en cuenta a dicho cuantificador al momento de asignar el valor de verdad, pues le da a la proposición dos valores de verdad posibles de acuerdo a valores de x.

El cuadrado de un número entero es menor a 9	Sea $x \in \mathbb{Z}$ $x^2<9$	V si $-3<x<3$ F si $-3>x>3$

Figura 2. Producción del alumno 20 en una tarea de lectura de símbolos

El ejemplo presentado en la Figura 3 corresponde a resoluciones que implicaban tareas de escritura en el ejercicio en el que se solicitaba escribir una proposición *verdadera* en la que figurara el símbolo indicado. En este caso, el estudiante manifiesta un conflicto semiótico cognitivo al usar, indistintamente, los dos conectores o juntores al expresar las soluciones de una ecuación; en la primera, queda una proposición falsa ya que el valor de la variable no puede ser simultáneamente 1 y –1; sin embargo es posible que el alumno lo asocie a una expresión del tipo “las soluciones de la ecuación son 1 *y* –1”, asociación que no realiza en el segundo ejemplo.

$x^2 = 1$	$x = 1$	$\wedge\ x = -1$
$x \cdot y = 0$	$x = 0$	$\vee\ y = 0$

Figura 3. Producción del alumno 57 en una tarea de escritura

Conclusiones

La definición de las funciones semióticas F1, F2 y F3, permitió fragmentar el significado de los símbolos en algunas de sus componentes. Esto posibilitó su uso como herramientas metodológicas para describir y estudiar la construcción del significado de estos símbolos, localizando algunas dificultades. A partir del conteo de las funciones semióticas que se manifestaron como establecidas se definieron proporciones. Las mismas fueron agrupadas en tres categorías consideradas como distintos niveles de adecuación.

Los resultados globales obtenidos revelan que la mayoría de los estudiantes no manifiesta un nivel adecuado en la construcción de los significados de los símbolos evaluados.

Las dificultades más acentuadas se encontraron en la significación de los símbolos de inclusión, disyunción y conjunción. En el caso de la inclusión esta deficiencia podría adjudicarse a la poca frecuencia de uso en las prácticas matemáticas del primer año de estas carreras. Sin embargo, la construcción de su significado es necesaria puesto que, en asignaturas posteriores, será requerido su uso. La situación respecto de los conectivos es diferente pues su uso es habitual en distintas prácticas; algunos de los obstáculos observados podrían estar asociados a la falta de formación en lógica proposicional, en particular a los valores de verdad de las operaciones de conjunción y disyunción. Éste sería el caso de los alumnos de las carreras de Biología y Bioquímica. También se hallaron casos de estudiantes de carreras de Ingeniería o Matemática, que, si bien tuvieron formación en lógica proposicional, no logran transferir espontáneamente los análisis de valores de verdad a contextos externos a las tablas de verdad.

Muchos de los errores más frecuentes están ligados a la sintaxis manifestándose mayoritariamente en las tareas de escritura.

Es evidente que la función F1 es indispensable y previa al establecimiento de cualquier otra función en el proceso de significación. Cabe preguntarse si hay un orden de prioridad en el establecimiento de las demás funciones. Esto será objeto de futuros análisis como así también el estudio del establecimiento de cada tipo de función semiótica de manera global en todos los símbolos.

Referencias bibliográficas

Alcalá, M., (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao.

Arcavi, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 44, pp. 59-75.

Camós, C.; Rodríguez, M. (2009). *Exploración del uso de los lenguajes natural y simbólico en la enseñanza de Matemática superior.* Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI Cibem). Chile. Disponible en: http://ebookbrowse.com/articulo-camos-rodriguez-texto-completo-pdf-d36067393. Recuperado: 30/06/11.

Colombano, V., Formica, A., Camós, C. (2012). Enfoque cognitivista. En POCHULU, M. y Rodríguez, M. (compiladores). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. 115-152. Editorial Universitaria de Villa María: Villa María.

Distéfano M. L., urquijo, S. y González, S. (2010) Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 23; 59-71. ISSN 1815-0640.

Font, V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 14, pp. 1-35.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies y Mathematics*, (19), pp.333-355.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Redical constructivism in mathematics education*, pp. 53-74, Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Disponible en: http://www.springerlink.com/content/q6n3h0g5vj122068/fulltext.pdf.

Lacués Apud, E. (2011). Enseñanza y aprendizaje de los sistemas matemáticos de símbolos. *Didac*, 55-56, pp. 29-35.

Pimm, D. *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: Morata, 1990.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (1), pp. 45-56.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, pp. 19-52