USOS DE LAS GRAFICAS Y SUS REPERCUSIONES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE) UAG. (México)
cdolores@prodigy.net.mx
Campo de investigación: pensamiento variacional. Nivel educativo: medio, superior
Palabras clave: graficas, usos, desarrollo, pensamiento variacional

Resumen
En este documento se caracterizan los usos de las gráficas. Se caracteriza su uso en la enseñanza tradicional, en los medios de comunicación, para el desarrollo del pensamiento y el uso social que se les da en las comunidades de profesionales o en la vida diaria de la gente. En la enseñanza tradicional son utilizadas como auxiliares didácticos que hacen posible la visualización de datos. Hoy día las gráficas son muy usuales en los medios de comunicación como recursos para transmitir información a núcleos poblacionales amplios, sin embargo las graficas socialmente compartidas requieren de lectores con una cultura amplia que les posibilite entenderlas y darles el sentido adecuado. Las graficas no solo son necesarias transmitir información, son útiles para favorecer el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Las habilidades como: la estimación, el cálculo, la predicción, el planteo de conjeturas, para identificar lo que cambia, para correlacionar cambios, para determinar las cualidades del cambio, etc. pueden contribuir al desarrollo de este tipo de conocimiento.

Introducción

Desde la década de los noventa las gráficas han ocupado un lugar preponderante en el campo de la investigación en Matemática Educativa, hay evidencias de ello en Zimmerman & Cunningham (1991), Romberg *et al* (1993) y Roth (2003). Muchos de los procesos asociados a las graficas incluyen su interpretación y su construcción. La interpretación se refiere a las habilidades necesarias para leer una gráfica tanto local como globalmente, y darle sentido o significado (Leinhardt *et al* 1990). La construcción se refiere al acto de generar algo nuevo, construyendo una gráfica o trazando puntos a partir de datos, a partir de una regla funcional o a partir de una tabla. La interpretación de gráficas requiere de procesos agudos de visualización, aunque Eysemberg & Dreyfus (1991) mostraron que muchos estudiantes poco utilizan el pensamiento visual, prefieren el trabajo algorítmico. Diversas investigaciones han mostrado las dificultades e inconsistencias que afloran cuando los estudiantes hacen lectura de gráficas, véase por ejemplo a: Brassel & Rowe, (1993); Moschkovich *et al* (1993); Yerushalmy & Shternberg (2001); Wainer, (1992); Dolores *et al* (2002), Dolores (2004); Dolores y Valero (2004). Prácticamente todas estas investigaciones han sido realizadas considerando el contexto escolar, pues en este contexto las gráficas son utilizadas bien como herramientas para la enseñanza de las ciencias o las humanidades o bien como objetos de enseñanza en sí mismos en las clases de matemáticas. De ahí deviene uno de los usos tradicionales de las gráficas en la escuela: como auxiliares didácticos; sin embargo en el campo de la investigación en matemática educativa se ha sugerido que las gráficas pueden ser usadas para desarrollar la actividad cognoscitiva del pensamiento. El uso tradicional más difundido de las gráficas ha sido para comunicar información a través de los medios de difusión o comunicación, de ahí que aparecen frecuentemente en periódicos, revistas, etc. Las gráficas también son utilizadas por comunidades de profesionales no ligados directamente a la matemática, las usan para satisfacer necesidades propias de sus campos profesionales. Estos usos descritos sintéticamente en este apartado son ampliados en las páginas posteriores de este documento.

¿Qué son las gráficas?

Una gráfica es una representación visual de una relación entre dos o más variables. Una gráfica cartesiana comúnmente esta formada de dos ejes llamados: eje *x*, el eje horizontal y el eje *y*, el eje vertical. En estos ejes se representan las variables y suelen tomar el nombre de variables concretas en dependencia del contexto en que se usen. Suelen también usarse gráficas en tres dimensiones representadas en coordenadas cilíndricas o esféricas. Existe una enorme variedad de gráficas que se clasifican según su forma, el tipo de variables que se representa, etc. Son usuales en textos de matemáticas, en textos de de estadística o incluso en los medios de información. En estos últimos las gráficas usuales son: de barras, lineales, histogramas, de dispersión, de polígonos de frecuencia, polares, etc. Las gráficas se consideran como herramientas visuales útiles porque posibilitan la detección de tendencias, facilitan las comparaciones y se constituyen en medios idóneos para analizar el comportamiento de fenómenos de variación. No obstante, los usos que en la enseñanza tradicional se les da parecen estar alejados de la concreción de estas bondades. Expliquemos esto.

El uso de las gráficas en la enseñaza tradicional

En algunas observaciones hechas a profesores de matemáticas del nivel medio y superior del centro del Estado de Guerrero se ha notado que utilizan tablas de valores y estos son frecuentemente representados en una gráfica. Sin embargo hemos observado que con el solo hecho de representar algunos puntos en el plano, unir los puntos y dibujar la recta (o curva) que se forma, los profesores (principalmente los de secundaria) consideran culminada la tarea de graficación. Esta práctica asume que la graficación consiste solo en localizar puntos y hacer el dibujo, incide solo en la transición del plano numérico al plano gráfico. En el nivel medio superior observamos que los profesores, en el caso de la Geometría Analítica, privilegian la obtención de los puntos singulares de las gráficas por medios algebraicos, la construcción de la gráfica propiamente dicha es relegada a un papel secundario, incluso a veces se omite. Las gráficas en la enseñanza tradicional son utilizadas principalmente como medios que hacen posible la visualización de datos, éste es el fin primordial.

El uso de las graficas para comunicar información

Etimológicamente, el término comunicación deriva del latín *comunicare*, que puede traducirse como "compartir algo con alguien". Hoy día es común que se comparta información sintetizada en gráficas en amplias núcleos sociales a través de los periódicos, revistas, la televisión o la Internet. Una de las virtudes atribuidas a las gráficas es que posibilitan el acceso a la información ya que permiten una visión de conjunto de los fenómenos en cuestión, hacen que la información sea más rápidamente perceptible que la observación directa de los datos numéricos. Uno de los fenómenos más trascendentes que trajo consigo el sigo XX ha sido la posibilidad del acceso del público en general a la información. A su vez, esto ha sido posible gracias a la incorporación y uso de los medios masivos de comunicación y el consiguiente uso de las tecnologías actuales. Los medios de comunicación en la actualidad son una pieza clave en la transmisión de la información y en esto las gráficas juegan un papel preponderante. Sin embargo la lectura e interpretación de las gráficas que se comparten socialmente a través de esos medios, requiere de cierta base cultural para darles el sentido y significado a la información en ellas implícita. Mayor especialización se necesita para interpretar gráficas que se utilizan en campos profesionales específicos. En una investigación reciente (Cuevas, 2006) al plantear tareas de lectura e interpretación de gráficas que se publican en periódicos de circulación nacional, se pudo detectar que los estudiantes de educación básica externaron escaso dominio de los significados de los conceptos poblacionales o financieros allí tratados. Esta investigación deja al descubierto la necesidad que el lector tiene de una cultura amplia que le posibilite entender la información dada a través de las gráficas.

Uso de las gráficas para el desarrollo del pensamiento

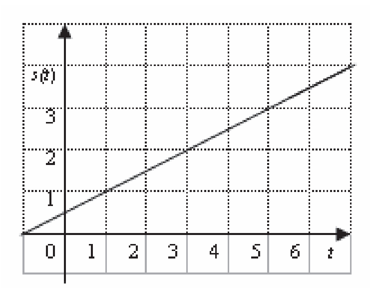
Duval (1998) afirma que las gráficas no solo pueden ser utilizadas para comunicar o transmitir información, sino que pueden ser útiles en el desarrollo de la actividad cognoscitiva del pensamiento. En esta misma dirección Cantoral y Montiel (2001) reconocen la existencia de dos formas clásicas de entender la enseñanza de la graficación: una que asume que la graficación es una técnica o conjunto de técnicas que permiten bosquejar la gráfica de una función, y otra menos difundida, que entiende la graficación como forma de interpretar el sentido y significado y de sus propiedades desde una perspectiva cognoscitiva. Inclusive se han acuñado los términos de *visualización matemática* y *pensamiento visual* para referirse a este tipo de procesos. El primer caso es caracterizado por Zimmerman & Cunningham (1991) como los procesos de formación de imágenes (tanto mentalmente, como con la ayuda de lápiz y papel o con la ayuda de tecnología) y el uso efectivo de tales imágenes para el descubrimiento matemático y la comprensión. El segundo caso, un poco más restringido, se utiliza para describir los aspectos del pensamiento matemático que están basados o que pueden ser expresados en términos de imágenes mentales.

Por nuestra parte creemos que las gráficas no solo pueden ser utilizadas como simples auxiliares didácticos en los que se posibilita la visualización de datos, o bien no solo pueden usar para hacer preguntas *interesantes* en los exámenes. Para nosotros la visualización no es el fin sino el medio para desarrollar pensamiento matemático, para generar y desarrollar conocimiento no es suficiente una posición contemplativa de las gráficas sino una posición activa. Para desarrollar el pensamiento por medio de las gráficas sugerimos acciones planteadas en Dolores (1999) y las desprendidas de Carlson *et al* (2002). Estas acciones sistemáticamente planteadas pueden ser resumidas en cinco: 1ª. Acción ¿Qué cambia? 2ª. Acción ¿Cuánto cambia? 3ª Acción. ¿Cómo cambia? 4ª. Acción ¿Qué tan rápido cambia? y 5ª. Acción ¿Cómo se comporta global y puntualmente la gráfica?

La primara acción involucra la identificación de qué variables están representadas, la ubicación de puntos en el plano y la determinación de intervalos de variación. Para poder determinar cuánto cambia eso que cambia se requiere hacer comparaciones y operaciones de resta entre estados finales e iniciales, tanto para la variable dependiente como para la independiente, considerando la correlación entre esos cambios. Para saber cómo cambian las variables representadas se requiere poder determinar si la gráfica crece, decrece o se mantiene constante, o en otras palabras, determinar la dirección del cambio. Para poder determinar la rapidez del cambio se requiere la utilización de la razón promedio de cambio que involucra necesariamente cambios de la variable dependiente en relación a los cambios de la variable independiente. El comportamiento global y puntual de la gráfica implica la utilización de la razón de cambio instantánea (derivada) para precisar en qué intervalos (o puntos) crece o decrece, en qué puntos tiene máximos, mínimos o puntos de inflexión. De hecho, en los programas y textos de Cálculo Diferencial del bachillerato se sugiere el tratamiento del análisis de funciones usando la derivada.

En nuestros trabajos de docencia e investigación hemos diseñado y puesto escena diferentes actividades, mediante el uso de las gráficas, a fin de desarrollar el pensamiento y lenguaje variacional con estudiantes de bachillerato y principiantes universitarios. Habilidades como: la predicción, la estimación, el cálculo cambios y razones de cambio, para la determinación de intervalos de crecimiento y decrecimiento, para el planteo de conjeturas, para validar conjeturas, para transitar del leguaje algebraico al gráfico y viceversa, entre otros, pueden ser desarrolladas si se diseñan y se realizan actividades que involucren el pensamiento visual utilizando escenarios ricos en gráficas. A continuación presento algunos ejemplos representativos.

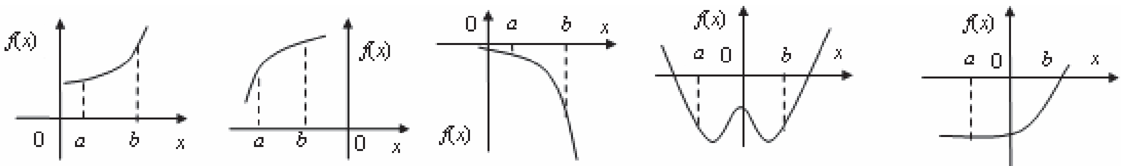
- En la Gráfica 1 se muestra la trayectoria de una partícula. ¿A qué razón se desplaza entre $t = 8$ y $t = 9$ ¿Cuál es su velocidad exactamente en $x = 9$?



Gráfica 1

La realización de esta tipo de actividades puede desarrollar la habilidad de predicción. Para realizarlas es necesario, extraer y utilizar la información que provee la gráfica calculando la pendiente de la recta en el intervalo dado y hacer uso de la predicción, ya que se trata de una recta y esta (si no hay otra condición) proseguirá comportándose uniformemente.

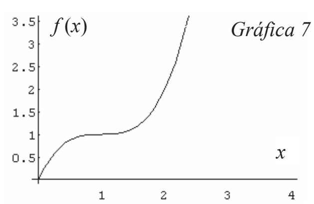
- ¿En qué gráficas se cumple que: $f'(a) > f'(b)$ o bien $f'(b) < f'(a)$?



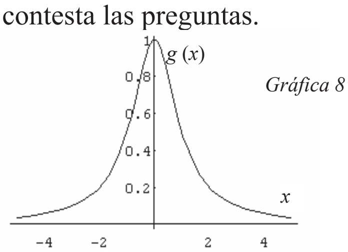
Gráfica 2 *Gráfica 3* *Gráfica 4* *Gráfica 5* *Gráfica 6*

Con esta actividad se podría desarrollar la habilidad para hacer comparaciones y estimaciones utilizando la asociación entre la pendiente de las curvas y la derivada.

- A partir de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ contesta las preguntas.



Gráfica 7



Gráfica 8

¿En dónde crece con mayor rapidez la gráfica de $f(x)$? ¿En $x = ½$, en $x = 1$ ó en $x = 2$?
¿En qué punto la gráfica de $g(x)$ decrece con mayor rapidez? ¿En $x = 1$, en $x = 2$ ó en $x = 4$?

Ponga a prueba sus estimaciones si gráfica de $f(x)$ se rige bajo la fórmula: $f(x) = (x-1)^3 + 1$

y la gráfica de $g(x)$ se rige mediante la fórmula: $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Actividades de este tipo pueden favorecer la realización de estimaciones, el planteo de conjeturas sobre la variación de las curvas y la búsqueda de procesos de validación de sus propias conjeturas.

- Analice el comportamiento de las gráficas de la Figura 1.

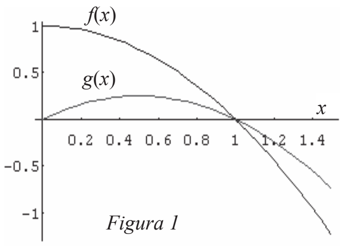


Figura 1

¿Es $f'(1) = g'(1)$? ó ¿$f(1) = g(1)$?
Estime la rapidez con que crecen las curvas $f(x)$ y $g(x)$ para $x = 0.5$
Estime la rapidez con que decrecen las curvas en $x = 1$.
Ponga a prueba sus estimaciones si las curvas se rigen por las fórmulas: $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = x - x^2$.

El conocimiento puede tener una oportuna motivación si se plantea en términos de contradicciones y éstas se convierten retos para los estudiantes. En nuestras investigaciones (Dolores, 2004) hemos encontrado que con frecuencia los estudiantes consideran que la derivada en un punto es equivalente al valor de la ordenada en ese mismo punto, incluso hemos constatado que es difícil superar esta concepción alternativa. Sin embargo actividades de este tipo podrían contribuir a superar esta confusión.

El acercamiento sobre el uso social de las gráficas

En investigaciones recientes se estudia la graficación en el discurso matemático escolar sobre la base que da la matemática funcional y en el desarrollo de las prácticas sociales (Cordero, 2005; Buendía y Cordero, 2005). La relación que se establece entre las gráficas y los estudiantes en la escuela es diferente de aquella que se establece entre las gráficas y las comunidades de profesionales o incluso con la gente común y corriente. En el primer caso la relación es permeada por el contrato didáctico vigente, en el segundo son las relaciones utilitarias y funcionales las que predominan. No es lo mismo estudiar las gráficas en el contexto escolar "para pasar" un examen que utilizarlas para satisfacer una necesidad propia de las comunidades de profesionales o para uso cotidiano de la gente. Esta vertiente del uso social de las gráficas ha tenido lugar bajo el enfoque socioepistemológico. En esta dirección se han encontrado evidencias sobre prácticas argumentativas gráficas en diversas situaciones donde son resignificadas al debatir entre la *función* y *forma* de la graficación. Contrario a las investigaciones que parten de premisas que colocan a la matemática formal en el papel central, estas investigaciones centran la atención en los usos y desarrollo de prácticas de la graficación y de este modo han posibilitado un acercamiento a la matemática funcional. En esta dirección se puede investigar cómo viven las gráficas en contextos sociales extraescolares. Si bien las gráficas son objetos de enseñanza en la escuela, también son de uso expandido en núcleos profesionales específicos. Varias preguntas podrían tener sentido en este contexto, ¿Cómo usan las gráficas los empleados encargados del control de calidad en una empresa? ¿Cómo usan las gráficas los biólogos? ¿Cómo usan las gráficas los periodistas? ¿Qué diferencias hay entre el uso de las graficas en la escuela y su uso en actividades profesionales específicas? Estas preguntas ocuparán nuestra atención en futuros trabajos.

Referencias Bibliográficas

Brassel, M. & Rowe, B. (1993). Graphing skills among high school physics students, *School Science and Mathematics 93*, 63–71.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspects generators of knowledge in social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58(3)*, 299–333.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*, México D. F., Méx.: Prentice Hall.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S. & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education, 33 (5)*, 352–378.

Cordero, F. (2005). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 18*, 477-482. México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cuevas, I. (2006). *Lectura e interpretación que de las graficas hacen estudiantes de educación básica.* Tesis de maestría, no publicada. Maestría en Matemática Educativa, Facultad de Matemáticas UAG, Chilpancingo Gro., Méx.

Dolores, C., Alarcón, G. y Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16 (3)*, 225–250.

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación.* México D. F., Méx.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7(3),* 195–218.

Dolores, C. y Valero, M. S. (2004). Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar. *Epsilon 58, 20 (1)*, 45-73.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). México D. F., Méx.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Eysemberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 25–37). Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60*, 1–64.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. & Arcabi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of lineal relations, and connecting among them. En T. Romberg, E. Fennema & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69–100). Hillsdale, N.J., USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Romberg, T., Fennema, E. & Carpenter, T. (1993). *Integrating Research on the Graphical Representations on Functions*. Hillsdale, N. J., USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Roth, W. (2003). *Toward an Anthropology of Graphing*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher 21*, 4–23.

Yerushalmy, M. & Shternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 251–268). Reston, Virginia, USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC, USA: The Mathematical Association of America.