EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LAS METÁFORAS EN EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

[1,2]Sastre Vázquez, P; [1]Boubée, C.; [1]Rey, G. , [1]Maldonado S., [3]Villacampa, Y.
[1]Facultad de Agronomía. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina. [2]Facultad e Agronomía. Universidad de Morón. Argentina.[3]Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Alicante. España.
psastre@faa.unicen.edu.ar; villacampa@ua.es

Campo de Investigación: Epistemología e Historia de la Matemática.
Nivel educativo: Superior (19-22 años).

RESUMEN

El conocimiento matemático está constituido por conceptos, metáforas, procesos y hábitos o actitudes, y se puede decir que un texto es bueno o un programa es completo cuando todos estos elementos son adecuadamente atendidos. Desde que Lakoff y Johnson (1991) pusieron de manifiesto la importancia del pensamiento metafórico, entendido como la interpretación de un campo de experiencias en términos de otro ya conocido, el papel de este en la formación de los conceptos matemáticos, es un tema que cada vez tiene más relevancia para la investigación en didáctica de las matemáticas. En este trabajo, enmarcado en un Proyecto de Investigación sobre los Obstáculos Epistemológicos, se analiza y discute la evolución histórica de las metáforas ligadas al concepto de función, en particular las asociadas a la gráfica de una función.

INTRODUCCION

Algunas de las preguntas que seguramente se harán los lectores de este artículo son: ¿Por qué hacer el análisis histórico de los objetos matemáticos?. ¿Tiene algún interés de tipo didáctico el análisis de la génesis de un concepto matemático? Leyendo a Lakatos, 1976: *"...las matemáticas lo mismo que las ciencias naturales, son falibles y no indubitables; que también crecen gracias a la crítica y a la corrección de las teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades, y en las que siempre cabe posibilidad de error o de omisión"* y a Farfán y Hitt, 1983: *"Existen elementos que permiten, e históricamente hicieron posible, la construcción de un concepto: todos estos son andamios de los que se vale el sujeto en su acción sobre el objeto, para acceder al concepto en sí, andamiajes con vida efímera que, circunstancialmente, son las herramientas con las que se captan los primeros elementos del concepto y donde el "error" y la sensibilidad a la contradicción desempeñan un papel importante*" es posible encontrar las respuesta a estos interrogantes.
Es decir, el desarrollo histórico de un concepto proporciona una pista de cómo, posiblemente, se desarrolla el conocimiento de tal concepto en la mente de un alumno, ya que existen muchas similitudes entre el desarrollo cultural y científico que ha mostrado el ser humano como especie y el desarrollo cultural y científico que muestra un ser humano a lo largo de su vida. Richard Rorty sugiere considerar la historia de la cultura como la historia de la dialéctica entre metáfora y literalización. El desarrollo del conocimiento humano no consiste en una aproximación gradual a la "verdadera" constitución del mundo, sino en un continuo proceso por el cual ciertas descripciones se van dejando a un lado en virtud de la mayor eficacia explicativa de otras. "La Tierra gira alrededor del sol" tuvo un valor metafórico hasta el siglo XV, o incluso un poco más adelante, pero sólo a partir de su proceso de literalización dicho enunciado comenzó a tomarse como verdadero. De esta

manera, muchas descripciones comienzan siendo metafóricas, en el sentido de no-habituales, para luego fosilizarse (literalizarse), hasta cierto momento en que nuevas redescripciones metafóricas ocupan el lugar de las anteriores metáforas extinguidas. No es posible, por tanto, adjudicar verdad o falsedad a una metáfora hasta tanto no haya sido literalizada.
Lakoff y Johnson sostienen como tesis principal que "nuestro sistema conceptual ordinario, en términos del cual pensamos y actuamos, es fundamentalmente de naturaleza metafórica" y que estos conceptos metafóricos que utilizamos estructuran nuestra percepción, nuestra conducta. En cuanto al papel de la metáfora en las transformaciones culturales, Lakoff y Johnson concuerdan con la concepción rortyana: muchos de estos recambios lexicales surgen a partir de la introducción de conceptos metafóricos nuevos y el abandono de los antiguos. Según Lakoff y Johnson, no sólo el saber cotidiano o el sentido común funcionan "metafóricamente": también las teorías científicas actúan a partir de conjuntos consistentes de metáforas, conjuntos sin los cuales nuestra comprensión del mundo no iría más allá de lo que nos brinda la experiencia física directa. En suma, la versión cognitivista se asienta sobre un supuesto clave: "Es imposible escapar de la metáfora". Esta especie de "fuga infinita" de la metáfora se afirma en que ellas "no son simplemente cosas que se deban superar; para superar las metáforas, de hecho, hay que usar otras metáforas.

La metáfora es un mecanismo de analogía en el que se concibe un concepto que pertenece a un dominio conceptual determinado en función de otro dominio conceptual, y en el que se establecen correspondencias y proyecciones entre los atributos de ambos dominios. En este sentido se habla de dominio origen (atributos salientes) y dominio destino, y de correspondencias entre ellos (Lakoff 1989). De esta forma, la metáfora permite una proyección ontológica a través de la interconexión de elementos que pertenecen a los dos dominios, así como una correspondencia epistemológica en la que el conocimiento del dominio origen, normalmente más básico y familiar, hace posible y facilita el razonamiento, la expresión, o la comprensión en el dominio destino, más complejo y abstracto. Estos procesos suceden a un nivel conceptual y de razonamiento, y se basan en esquemas e imágenes provenientes de la experiencia perceptual y personal del ser humano
La metáfora puede ser el puente o el punto de transición entre los preconceptos y la conceptualización, la reflexión y la capacidad argumentativa. Ella une y compacta lo conocido con lo desconocido, lo tangible y lo menos tangible, lo familiar y lo nuevo. Como "un puente posibilitando el paso de un mundo al otro" (Shift:1979), las metáforas posibilitan a los aprendices "entender y experenciar una clase de cosa en términos de otra," para parafrasear la noción de la metáfora en Lakoff y Johnson's (1980).
Cuenca y Hilferty, 1999, señalan que en la proyección metafórica no todos los elementos del dominio origen están incluidos, ni todos los elementos del dominio destino tienen un elemento en el origen, ya que en caso contrario se trataría del mismo dominio. Ello supone las correspondientes y lógicas limitaciones en cuanto al razonamiento por analogía que todos conocemos al usar metáforas. Por otro lado, los mismos autores nos recuerdan que al resaltar ciertas facetas del dominio destino, pueden quedar ocultos otros aspectos, permitiendo errores de conceptualización por olvidar precisamente la limitación anterior.
En este trabajo se analiza la evolución histórica de la génesis del concepto de función, identificando en las etapas del proceso histórico, las metáforas subyacentes a su gráfico. El objetivo de este trabajo es obtener material de trabajo que permita posteriormente analizar

el desarrollo de las explicaciones, sobre gráficos de funciones, presentadas en los libros de texto, con la finalidad de reconocer en ellas la existencia, o no, de expresiones que hacen referencia a metáforas, y así poder posteriormente analizar las producciones de alumnos, que hayan utilizado determinados textos, a fin de determinar los efectos que dichas metáforas producen en la compresión evidenciada por los alumnos.

ANALISIS HISTORICO

Durante la Época Antigua no existía una idea abstracta de variable y las cantidades se describían verbalmente o por medio de gráficos. El conteo implica correspondencia entre un conjunto de objetos y una secuencia de números para contar y las cuatro operaciones aritméticas elementales son funciones de 2 variables, como también lo son las tablas babilónicas. Durante esta época todos los desarrollos fueron explicados verbalmente, en tablas, gráficamente o por ejemplos.

Durante la Edad Media se estudiaron fenómenos naturales y las ideas se desarrollaron alrededor de cantidades variables independientes y dependientes sin definirlas específicamente. Una función se definía mediante una descripción verbal de sus propiedades específicas, o mediante un gráfico, no utilizándose fórmulas.

Durante el período moderno, que comienza a finales del siglo XVI, las funciones fueron equivalentes a expresiones analíticas.

Fueron Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) quienes dieron el paso fundamental que permitió liberar a la aritmética y el álgebra de su subordinación a la geometría. Se trataba de la representación de curvas geométricas en sistemas de coordenadas y, lo más importante, el tratamiento del álgebra y la aritmética sin tanta limitación con relación a la representación geométrica antigua. Si las curvas de esta manera podían describirse con ecuaciones algebraicas, también nuevas ecuaciones algebraicas permitían definir nuevas curvas que los griegos antiguos no podían conocer (pues estaban "amarrados" a las construcciones geométricas con regla y compás).

Los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas clásicas sobre las curvas: a) las curvas son secciones; y, b) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; para añadir una tercera: c) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

Descartes no utiliza las ecuaciones para dibujar curvas. Para él, las curvas, más que el conjunto de puntos que cumplen una determinada ecuación, son el resultado de movimientos sucesivos de curvas más simples, de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores. Lo que hace Descartes es considerar la curva generada a partir de curvas más simples, y a partir del estudio de estos movimientos halla la ecuación de la curva.

Leibniz (1646-1716) fue el primer matemático en utilizar la palabra función en 1692, para referirse a cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva, como la longitud de la tangente, la normal, subtangente y de la ordenada. Así afirmaba "una tangente es una función de una curva". Introduce las palabras: constante y variable; coordenadas y parámetro en términos de un segmento de constante arbitrario o cantidad. No utilizaba el concepto de función como lo entendemos en la actualidad. Para él una curva estaba formada por un *número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños.*

Euler (1707-1783) continúa el camino para precisar la noción de función comenzando a definir nociones como *constante* y *cantidad variable* y, en 1755 define función como una expresión analítica: "*la función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes"*. Pero no define "expresión analítica", que fue definida formalmente en el siglo XIX, explica que las expresiones analíticas admisibles son las que contienen las cuatro operaciones elementales, raíces, exponentes, logaritmos, funciones trigonométricas, derivadas e integrales. Euler admite como funciones las llamadas curvas mecánicas. Al ampliar el concepto de función divide las funciones en dos clases: las *continuas y las discontinuas*. El significado de estos dos términos era distinto al significado actual. Las discontinuas son las "curvas mecánicas". Es decir, son aquellas para las que no tenemos una ecuación conocida, aún cuando su trazo en papel sea seguido.
El concepto de función evolucionó, enriqueciéndose y cambiando a partir de la controversia iniciada entre Dalembert y Euler sobre el problema de la cuerda vibrante. Dada una cuerda elástica con extremos fijos se la deforma y se la suelta para que vibre. El problema consiste en determinar la función que describe la forma de la cuerda en cada instante. La discusión entre Dalembert (1717-1783), Euler y D. Bernoulli (1700-1782) se centró alrededor del significado de "función" y versó sobre funciones que solucionaban este problema, sosteniendo los dos últimos autores que se debían buscar soluciones mas generales. Para entenderlo hay que pensar que durante el siglo XVIII se aceptaba por "artículo de fe", es decir sin demostración que: *"Si dos expresiones analíticas coinciden en un intervalo, ellas coinciden en todas partes"*
En 1718 Bernoulli publica un artículo en el cual considera una función de una variable como una cantidad que está compuesta, de alguna manera, desde esta variable y constantes, y en 1753 propone una nueva solución al problema de la cuerda vibrante. Tanto Euler como Dalembert, rechazaron esta solución, basando sus argumentos en el artículo de fe la época. Señalaron que dado que *f(x)* y la serie coincidían en (0,l), éstas debían coincidir en todos lados, concluyendo que la solución de Bernoulli conducía al absurdo de una función *f(x)* par y periódica. Bernoulli formula la siguiente definición: *"llamamos función a las diversas cantidades dadas de alguna forma por una (cantidad) indeterminada x, y por constantes ya sea algebraicamente o trascendentemente"* ; ésta se convierte en la primera definición de función como expresión analítica. El mayor efecto que produjo el debate sobre el problema de la cuerda vibrante fue extender el concepto de función para permitir la inclusión de funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones con gráfico y sin expresión analítica
Fourier (1768-1830) conjeturó, pero no probó matemáticamente, que dada una función podía desarrollarla, en un intervalo apropiado, mediante una serie trigonométrica**.** Esto rompió el "articulo de fe "del siglo XVIII, ya que no era claro que dos funciones, dadas por diferentes expresiones analíticas, pudieran coincidir en un intervalo sin la coincidencia fuera. Aporta la idea de función como *correspondencia* entre dos conjuntos de números independiente de cómo esta correspondencia esté dada pero limitada por la idea de que la gráfica sea una gráfica continua.
Dirichlet (1805-1859) se dedicó a convertir el trabajo de Fourier en un trabajo matemáticamente aceptable, encontrando que el resultado de Fourier que afirmaba que toda función podía ser representada por una expansión en series, era falso. En 1829 Dirichlet estableció las condiciones suficientes para que fuera posible y definió función como: *"y es una función de la variable x, definida en el intervalo a<x<b, si para todo valor de la*

variable x en ese intervalo, le corresponde un valor determinado de la variable y. Además, es irrelevante como se establece esa correspondencia"
Dirichlet presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica ó curva que la represente. Da el primer ejemplo que ilustra el concepto de función como correspondencia arbitraria y también el ejemplo de una función que es discontinua en todas partes, en nuestro sentido, no en el de Euler. A partir de los trabajos de este matemático el concepto de función adquiere un significado independiente del concepto de expresión analítica, (Youscakevith,1976)
La teoría de conjunto iniciada por Cantor (1845-1918) produce una nueva evolución del concepto de función, extendiéndose la noción de función para incluir: *"toda correspondencia arbitraria que satisfaga la condición de unicidad entre conjunto numéricos o no numéricos"*
Los desarrollos en el álgebra abstracta y la topología dan lugar a nuevas definiciones teóricas conjuntistas. El grupo Bourbaki , 1939, definió función como una correspondencia entre dos conjuntos de una forma semejante a la dada por Dirichlet en 1837 (Yousvhkevitch, 1976): **"***Sean E y F dos conjuntos, que pueden o no ser distintos. Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F, se llama relación funcional en y, si para todo x en E, existe un único y en F el cual está en la relación dada con x. Damos el nombre de función a la operación que de esta forma asocia cada elemento x en E con el elemento y en F que está en relación con x,; se dice que y es el valor de la función en el elemento x y se dice que la función está definida por la relación dada. Dos relaciones funcionales equivalentes determinan la misma función "*. Bourbaki también formuló una definición de función equivalente, como conjunto de pares ordenados (Kleiner, 1989):*"una función del conjunto E en el conjunto F se define como un subconjunto especial del producto cartesiano ExF"*

CONCLUSIONES

Si bien Descartes desarrolló la idea de introducir una gráfica en forma analítica, en general, durante la época anterior a la aparición de una definición formal de función, las metáforas clásicas sobre las curvas fueron: *a) las curvas son secciones;* y, *b) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones; c) las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones y el análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva y d) las curvas están formadas por un número infinito de tramos rectos infinitamente pequeños*.
Hasta la publicación de los trabajos de Fourier, en la práctica la noción de función se identificaba con la noción de expresión analítica, es decir la metáfora durante esa época fue: *"una función es una expresión analítica"*. Poco tiempo después se encontró que esta identificación podía conducir a incoherencias: la misma función se podía representar mediante diferentes expresiones analíticas. También existían limitaciones referidas al tipo de funciones que se podían considerar.
A partir del debate sobre el problema de la cuerda vibrante el concepto de función se extendió permitiendo la inclusión de funciones definidas por expresiones analíticas a trozos y funciones con gráfico y sin expresión analítica. Es decir se introduce una nueva metáfora *"una función es un gráfico continuo"*. A partir de los trabajos de los trabajos de Dirichlet en los cuales presenta el primer ejemplo explícito de una función que no está dada por una expresión analítica, ni tampoco posee una gráfica ó curva que la represente, el concepto de

función se independiza del concepto de expresión analítica. Nace una nueva metáfora : *"una función es una correspondencia arbitraria".* Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones, terminó de tomar cuerpo la metáfora conjuntista: *"la gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas (x, f (x))*"o *"una función es un conjunto de pares ordenados".*

AGRADECIMIENTOS: Este artículo ha sido realizado con el apoyo del proyecto GV04B-563 de la Generalitat Valenciana (Consellería de Cultura, Educación y Deporte), España. Los autores desean expresar su gratitud por el mismo.

BIBLIOGRAFIA

Cuenca, M. y Hilferty; J. (1999*). Introducción a la lingüística Cognitiva*, Barcelona. Ariel.

Farfán, R. y Hitt, F. (1983). *Heurística Matemática* (Nivel Superior). Sección Matemática Educativa, CINVESTAV-IPN, México.

Kleiner, I. (1989). *Evolution of the function Concept: A Brief Survey.* The college Mathematics Journal, 20(44), pp. 282-300.

Lakatos. (1976). *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*. London, Cambrige University Press.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G., and M. Johnson. (1980). *Metaphors we live* by. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Rorty, Richard (1979) *La filosofía y el espejo de la naturaleza*, Cátedra, Madrid.

Shift, R. (1979). *Art and life: A metaphoric relationship*. In On metaphor, S. Sacks (Ed). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Youschkevitch, A. (1976). *The Concept of Function up to the Middle of the 19^{th} Century,* Arch. Hist. Ex. Sci. 16 37–85.