UN PASEO POR EL PARAÍSO DE CANTOR: PROBLEMAS Y REFLEXIONES ACERCA DEL INFINITO

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "*Dr. Joaquín V. González*".
Universidad de Buenos Aires. Buenos Aires (Argentina)
ccrespo@uolsinectis.com.ar
Campo de investigación: Epistemología e Historia de la Matemática, Pensamiento lógico;
Nivel Educativo: superior
Palabras clave: infinito, paradojas, argumentaciones

Resumen

La enseñanza y comprensión del infinito presentan, un reto a los docentes. Las dificultades radican no solamente en el conflicto originado en la adquisición de este concepto por parte de los alumnos sino también, en las estrategias de los docentes por lograr la transposición adecuada del conocimiento. Este trabajo presenta brevemente algunos problemas clásicos y no clásicos relacionados con el infinito cuya resolución fue posible a partir de los trabajos de Cantor. Estos problemas generan reflexiones acerca de las argumentaciones empleadas y las dificultades que presentan en el aula.

Los griegos y el infinito

En Oriente, en la India particularmente, el tratamiento del infinito en la antigüedad es totalmente distinto del que se llevó a cabo en Occidente (Crespo Crespo, 2002). Nos centraremos en este trabajo en la visión occidental del infinito y su evolución. El infinito es claramente una construcción matemática que evidencia su carácter sociocultural, ya que su tratamiento refleja la manera de pensar de la sociedad científica de la cultura en la que nos detengamos.

Sin lugar a dudas, la influencia aristotélica en Occidente dejó su sello en el pensamiento a través de los siglos y ha llegado a nosotros tal influencia en múltiples aspectos del pensamiento racional.

Con anterioridad a Aristóteles, en época de Pitágoras surge en Grecia la concepción de infinito como algo a lo que no se puede asignar ningún tamaño. También en esta época, el infinito sufre una de las primeras crisis. Las paradojas de Zenón fueron enunciadas hace veinticinco siglos por Zenón de Elea, que se ocupó de tres problemáticas: lo infinitesimal, lo infinito y la continuidad, las tres fueron tratadas a partir de las ideas de movimiento y las contradicciones a que su análisis conducía. Aparentemente, una de sus intenciones era probar la inconsistencia de las ideas pitagóricas respecto del número. En su época, coexistían dos concepciones opuestas acerca de las características del espacio y del tiempo: una, afirmaba que estas magnitudes son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo, y la otra, que ambas están formadas por pequeños intervalos indivisibles, por lo que el movimiento consistiría en una sucesión de pequeños saltos discretos. Las argumentaciones de Zenón se dirigieron contra ambas teorías y parten de la hipótesis fundamental de que tanto el tiempo como el espacio pueden ser cada uno e independientemente el uno del otro, finitamente divisibles o infinitamente divisibles. Los planteamientos de Zenón tuvieron grandes consecuencias en el desarrollo del pensamiento matemático.

Para Aristóteles, el infinito existe en la naturaleza: en el tiempo que no tiene principio ni fin y en las magnitudes que pueden dividirse y seguirse dividiendo. El concepto aristotélico de infinito es la que dominó en la historia hasta la época cantoriana, y que tuvo una gran influencia en el desarrollo de este concepto. La concepción potencial del infinito es la que responde a la interpretación natural intuitiva del infinito; el infinito actual no tiene para Aristóteles un significado unido a la acción, sino que es estático y debe ser comprendido en su totalidad.
A partir de Aristóteles, los matemáticos griegos concibieron el infinito sólo en su esencia potencial. Se lo interpreta como aquello que siendo de hecho finito, crece y puede crecer sin límite alguno. El pensamiento de Aristóteles se reflejó en la obra de Euclides: todas las figuras geométricas consideradas en los Elementos son finitas y limitadas, en particular, la recta concebida por Euclides es subdivisible de manera potencialmente infinita y no atómica, siempre es posible "alargar" la recta hacia ambos lados y, dos puntos de la recta determinan un segmento que siempre es posible dividir en otros dos segmentos. Ambos procesos se pueden repetir hasta el infinito (Euclides, 1991). Por otra parte, para Euclides, existen más números primos que cualquier colección de números primos dada. Esta concepción evidencia claramente, una vez más, la presencia potencial del infinito en la matemática griega.

Algunas paradojas y problemáticas que involucran al infinito

Las paradojas vinculadas con el concepto de infinito que han surgido a través de la historia son numerosas. La esencia de estas paradojas es que se intenta dar al infinito un tratamiento similar al que se da a conjuntos finitos. Esto puso a los matemáticos ante algunas conclusiones que eran inexplicables en su época y que fueron considerados como paradojas durante siglos.

Algunas de estas paradojas son las siguientes:

- Existen cantidades infinitas que son el doble de otras cantidades infinitas:

> *Consideremos un círculo y sus infinitos diámetros; cada uno divide al círculo en dos semicírculos, o sea que existe el doble de semicírculos que de diámetros, por lo tanto llega a obtener un infinito mayor que otro.*

Este razonamiento realizado por Proclo de Alejandría (Siglo V) es para él contradictorio, ya que no acepta que una cantidad infinita sea el doble de otra cantidad infinita.

- Es posible poner en correspondencia conjuntos numéricos tales que uno esté incluido en otro:

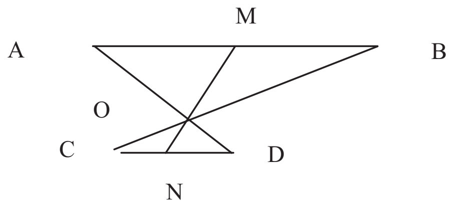
> *Si consideramos los números naturales y sus cuadrados, a cada número natural se le puede hacer corresponder su cuadrado, lo que implica que existen la misma cantidad de naturales que de cuadrados, pero es evidente que no todos los números naturales son cuadrados, por lo que hay más naturales que cuadrados.*

Esto fue observado por Galileo Galilei (siglo XVI). Análogamente:

> *Si consideramos los números naturales y sus duplos, a cada número natural se le puede hacer corresponder su duplo, lo que implica que existen la misma cantidad de naturales que de pares, pero es evidente que no todos los números naturales son pares, por lo que hay más naturales que pares.*

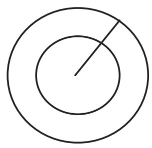
- Es posible poner en correspondencia los puntos de dos segmentos de distinta longitud:

    Dados dos segmentos AB y CD de distinta longitud, que podemos suponer paralelos, conéctese D con A y B con C para obtener el punto O. A cada punto M sobre el AB, puede hacerse corresponder un punto N sobre el CD.



- Es posible poner en correspondencia los puntos de dos circunferencias de distinto radio:

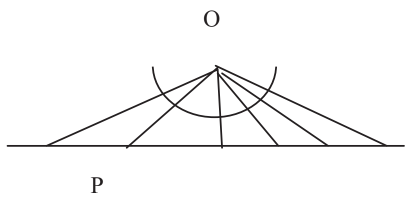
    Consideremos dos circunferencias concéntricas. A través de sus radios es posible ver que para cada punto de la circunferencia interior existe uno en la exterior y para cada punto de la exterior uno de la interior, o sea que tenemos la misma cantidad de puntos en ambas. Sin embargo las longitudes de ambas circunferencias son distintas.



De manera análoga, es posible razonar para en el espacio tridimensional parados esferas de distinto radio.

- Es posible poner en correspondencia todos los puntos de una semicircunferencia con los de una recta.

    Se traza una recta y la semicircunferencia como se indica en la figura. Dado un punto P de la recta, se traza el segmento OP desde el centro de la circunferencia O. Este procedimiento genera una correspondencia entre ambos conjuntos, a pesar de que la longitud de uno es finita y la del otro, infinita.



Estas paradojas eran conocidas durante la Edad Media. El concepto de infinito es abordado con una nueva óptica: se lo relaciona con la religión, con la creación, con Dios. Se lo intenta explicar desde la teología. El halo de misterio que rodea al infinito en esta época se relaciona directamente con la divinidad. Se discutió además acerca del infinito actual y el potencial.
Santo Tomás (siglo XIII) negó la existencia de conjuntos infinitos argumentando que si se pudiesen concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción. Santo Tomás negaba la existencia del infinito en acto fuera de Dios, aduciendo para probar su tesis un argumento basado en la omnipotencia de Dios: Dios puede hacer lo que quiera, pero el hacer provoca la existencia de lo que es hecho, por lo cual no puede darse en todo y para todo sin límites aquello que produzca contradicciones.
El obispo inglés Robert Grosseteste, en el mismo siglo, afirmó que el único que puede manejar el infinito es Dios, pues para Él los infinitos son finitos.
Para San Agustín, el infinito actual es un atributo que existe, pero que le es propio a Dios. *"Es absolutamente cierto que hay una infinidad".*

Por otra parte, siglos después, Carl Gauss explica también el infinito en término de límites. Dijo en 1831: *"Protesto contra la utilización de una cantidad infinita como si fuera una entidad real; en las matemáticas esto está prohibido. El infinito no es más que un modo de hablar, en el que se mencionan en el sentido propio, aquellos límites a los que ciertas razones se pueden aproximar tanto como se desee, mientras que a otras se les permite crecer sin límite."* Los que se ocuparon en esta época del infinito actual, tuvieron que oponerse a la autoridad de Gauss.
Sin embargo, los problemas relacionados con el infinito empezaron a presentarse con mayor frecuencia a medida que el cálculo comenzó a desarrollarse, por ejemplo a través de las series infinitas.

Bolzano y sus paradojas del infinito

En *Las Paradojas del infinito*, obra póstuma de Bertrand Bolzano publicada en 1851, encontramos una clara comprensión del concepto de coordinabilidad:

> *..."Afirmo que entre dos conjuntos que sean ambos infinitos se puede establecer una correspondencia tal que por una parte sea posible unir un objeto de un conjunto con otro del segundo para formar un par de manera que ningún objeto de ambos conjuntos deje de formar parte de algún par y tampoco forme parte de dos o más pares; y por otra parte es también posible que uno de estos conjuntos esté contenido en el otro como un subconjunto propio, de forma que las multiplicidades de estos representan, cuando consideramos todos los objetos de los mismos como iguales, es decir como unidades, tengan las más diversas relaciones unas con otras"...*

A Bolzano se debe la primera introducción del infinito desde un punto de vista conjuntista en la matemática, consiguiendo con esta herramienta un medio conceptual adecuado para el tratamiento de este concepto. Definió los conceptos de número y de magnitud a partir de la idea de colección. En relación al infinito, defendió la existencia del infinito actual. Su

concepción de infinito no tiene precedentes y puede considerarse revolucionaria, ya que modificó ideas milenarias. El infinito es una propiedad susceptible de ser atribuida a objetos que pueden ser contados o medidos.
Algunas ideas surgen claramente del abordaje que realiza Bolzano del infinito.

- *Una multiplicidad es infinita si todo conjunto finito es sólo una parte de ella.*
- *Si un matemático encuentra una cantidad mayor que cualquier número finito de unidades que ha elegido, la llamará infinitamente grande.*
- *Si es tan pequeña que cualquier multiplicación finita es menor que la unidad tomada, la llamará infinitamente pequeña.*
- *Aparte de estos dos tipos de infinitud y de las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas de orden superior que se basan en esta idea, no existe para las matemáticas ningún otro tipo de infinitud.*

Bolzano, al referirse al infinito actual, lo denomina "mal infinito" y al infinito potencial lo llama "infinito como cantidad variable"

Cantor y la formalización del infinito

Es imposible hablar del concepto de infinito sin mencionar al matemático alemán de origen ruso George Cantor. Definió los números transfinitos y caracterizó las nociones de potencia numerable y del continuo, sentando las bases de la teoría de conjuntos. Cantor definió formalmente conjunto infinito como aquel en el que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre el mismo conjunto y una parte propia de él, idea ya perfilada por Bolzano. Probó que un espacio de dimensión n tiene exactamente el mismo número de puntos que un espacio de dimensión 1. A Cantor se debe el enfoque actual del infinito, a partir de las definiciones de coordinabilidad de conjuntos.
Las ideas de Cantor no fueron aceptadas por la mayoría de los miembros de la comunidad matemática de su época, más aún: la mayoría de los miembros de esta comunidad, lo rechazaron. Fue a partir de esta época cuando surgió una famosa confrontación entre Cantor y Krönecker. Cantor fue calificado por Krönecker como "*charlatán, renegado y corruptor de la juventud*". Los intuicionistas, no aceptaron en absoluto sus ideas. Henry Poincaré, en 1909, no dudó en afirmar que *"no existe ningún infinito actual"* y que con el infinito se designa sólo la posibilidad de crear permanentemente nuevos objetos, tan numerosos o más de lo que son los objetos ya creados. Poincaré afirmó que la teoría de números transfinitos era una "*enfermedad*" de la que algún día las matemáticas llegarían a curarse.
Pero no todos los matemáticos atacaron a Cantor. Dedekind, convencido defensor del empleo del lenguaje conjuntista en matemática pura, elaboró las definiciones conjuntistas habituales de los números naturales, los enteros, los racionales y los reales. El gran avance del enfoque conjuntista estuvo acompañado por nuevas concepciones de los fundamentos de la matemática que estimularon la aparición de sistematizaciones.
Hilbert desempeñó un papel central como adalid del enfoque conjuntista abstracto, llegando a comprometer en la empresa toda su autoridad como investigador y líder de la comunidad matemática. Afirmó: *"Queremos investigar cuidadosamente, siempre que exista la menor perspectiva de éxito, las construcciones conceptuales y formas de inferencia fructíferas, y cultivarlas, afianzarlas y hacerlas susceptibles de aplicación. Del paraíso que Cantor nos creó, nadie podrá expulsarnos."*
A partir de las ideas de Cantor, las que hasta entonces eran paradojas del infinito, pasaron a poder ser explicadas. Dejaron de verse en estos razonamientos contradicciones. Se

comprendió que el tratamiento del infinito como objeto matemático no debe ser el mismo que se le daba a objetos finitos.

El infinito en el aula

Es cierto que el concepto del infinito, no parece regido por el sentido común. Contradice ideas "evidentes" e "intuitivas", como el axioma griego*: "El todo es mayor que las partes"*, tal como ocurre en las paradojas que hemos enunciado anteriormente. Esto es lo que hizo que durante siglos se tratara de una idea inabordable desde la ciencia. En el aula encontramos situaciones similares.
La enseñanza de este concepto presenta, sin lugar a dudas un reto a los docentes, ya que involucra obstáculos epistemológicos y didácticos que reportan diversos investigadores (Waldegg, 1996, Garbin y Azcárate, 2002, Lestón y Veiga, 2004).
El estudio de la evolución histórica y epistemológica de este concepto puede, sin lugar a dudas, dar luz de cómo nace y se desarrolla, cómo se plantean y construyen los procedimientos relacionados y qué limitaciones conceptuales aparecen en el aprendizaje de la noción de infinito.
El análisis de las paradojas surgidas y la manera en la que la teoría desarrollada por Cantor da respuesta a ellas, constituye quizá una manera de presentar y trabajar este concepto en la escuela, dando la posibilidad a los alumnos de construir este concepto a partir de aquellas ideas que permitieron que evolucionara a través de la historia hasta llegar a su tratamiento como lo conocemos en la actualidad.

Referencias bibliográficas

Bell, E. (1996). *Historia de las Matemáticas.* México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, K. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del Infinito*. México: Mathema.

Crespo, C. (2001). *Acerca de la comprensión del concepto de continuidad.* En Boletín de SOAREM nº 11 (pp.7-14). Buenos Aires, Argentina: SOAREM.

Crespo, C. (2002). La noción de infinito a través de la historia. En Crespo, C. (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 15(1). México: Iberoamérica, pp. 529-534.

Euclides, (1991). *Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Gredos.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años*. En Enseñanza de las ciencias, 20 (1). pp.87-113

Gheverghese, G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid, España: Pirámide.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras.* Madrid, España: Espasa Calpe.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Vol I, II y III.* Madrid, España: Alianza Universidad.

Kuratowski, K. (1973). *Introducción a la teoría de conjuntos y a la topología*. Barcelona: Vincens Vives.

Lestón, P. y Veiga, D. (2004). Introducción al infinito. En Díaz, L. (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 17(1), pp.440-410.

Sartorio, A. (2000). *Conjuntos e infinitos*. Buenos Aires: Eudeba.

Vita, V. (1992). *El infinito matemático en Aristóteles y en su tiempo.* En *Mathesis* Vol VIII n° 2. México: Universidad Autónoma de México.

Waldegg, G. (1996). Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), pp. 107-122.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Siglo XXI.

Zellini, P. (1991). *Breve historia del infinito.* Madrid, España: Ediciones Siruela.