UNA EXPERIENCIA CON MODELACIÓN MATEMÁTICA EN DIFERENTES NIVELES EDUCATIVOS.

Etcheverry, Nilda; Evangelista, Norma; Reid, Marisa; Torroba, Estela
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina
E-Mail: estelat@exactas.unlpam.edu.ar

Campo de Investigación: Modelación Matemática; Nivele Educativo: Medio y Superior.

Resumen

En el presente trabajo abordamos la Modelación Matemática como una alternativa pedagógica en distintos niveles educativos.

La experiencia consiste en presentar el mismo problema a estudiantes de primer año de Nivel Polimodal (Medio superior) y a alumnos de la carrera Profesorado en Matemática que habían cursado la asignatura Análisis I.

El trabajo describe una actividad de Modelación Matemática en la que se propuso, a través de una situación problemática, analizar los costos de producción e ingresos según el nivel de complejidad de fabricación de joyas, cuyos modelos obedecen a las etapas sucesivas de la curva Antikoch.

Concluimos que el uso de modelación es un proceso para desarrollar capacidades en general y actitudes en los estudiantes, tornándolos creativos y habilidosos en la resolución de problemas.

Introducción

En el presente trabajo reportaremos acerca de los procesos seguidos por estudiantes de distintos niveles para resolver un problema propuesto en el transcurso de una experiencia didáctica diseñada para mostrar que el conocimiento adquirido en un curso de enseñanza universitaria puede y debe ser transferido a la enseñanza elemental de Matemática.

Se propuso el mismo problema a estudiantes de primer año de Nivel Polimodal de una escuela de la ciudad de Santa Rosa (La Pampa) y a estudiantes universitarios. Estos últimos, alumnos de la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. que habían cursado la asignatura Análisis I y tenían conocimientos de límites de sucesiones y series.

La actividad propuesta consiste en calcular el perímetro y el área de etapas sucesivas de la curva Antikoch, un fractal generado por simple recursión de un triángulo equilátero. A partir del cálculo de costos de producción, precio de venta y beneficio analizaron el comportamiento a largo plazo de estas cantidades para optimizar la ganancia.

Esta investigación es enmarcada en una pedagogía basada en la Modelación Matemática, ya que según Bassanezi (1994): "Trabajando con Modelación Matemática no solamente se apunta a afianzar el conocimiento sino también a desarrollar una forma particular de pensar y actuar: producir conocimiento, poner junto abstracciones y formalizaciones interconectándolo a procesos empíricos y fenómenos considerados como situaciones problemáticas."

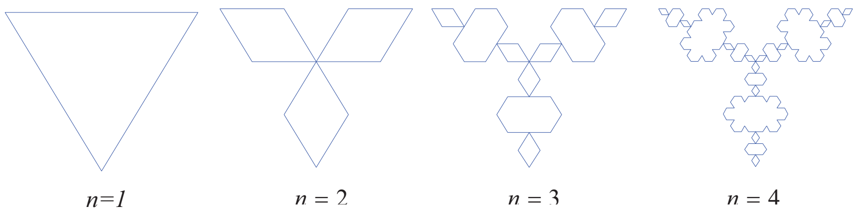
La Modelación como estrategia pedagógica ha sido empleada en distintos niveles educativos. Existen experiencias llevadas a cabo en los niveles inicial y medio (Blomhøj, 2004; Biembengut & Hein, 1999, 2000a), universitario (Etcheverry et al, 2003a, 2003b; Borba & Bovo, 2002; Araújo, 2002; Barbosa, 2001; Borba, Menegheti & Hermini, 1997; Gazzeta, 1989) y hasta en el nivel de postgrado (Bassanezi, 1994). Autores como Barbosa (2001), Bassanezzi (2002) o Biembengut (2004) coinciden en señalar la importancia de incluir la modelización en los cursos de formación de profesores y en los cursos de perfeccionamiento de los mismos.

La responsable del desarrollo de la propuesta didáctica fue una docente-investigadora que está a cargo de la cátedra de Análisis Matemático I. Otra integrante del equipo realizó filmaciones y grabaciones de audio durante el desarrollo de los encuentros con los alumnos y confeccionó un cuaderno de registro de observaciones a fin de describir y analizar el desarrollo de las actividades, los procesos de pensamiento y las estrategias de los estudiantes.
En la siguiente sección describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó del estudio y la propuesta didáctica que generó el escenario de investigación. Posteriormente reportaremos algunos episodios y, finalmente, presentaremos algunas conclusiones.

El grupo de trabajo
Para realizar esta experiencia se trabajó con alumnos de Primer año de Nivel Polimodal de un Colegio de la Ciudad de Santa Rosa en su habitual clase de Matemática, a cargo de una de las docentes integrantes del grupo de investigación y con estudiantes de Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa que habían cursado la asignatura Análisis I. La experiencia se realizó en mayo de 2004.

Propuesta didáctica
A ambos grupos se les planteó el siguiente problema:

Una joyería tiene para la venta distintos tipos de collares diseñados por un artesano de la siguiente forma: a partir de un triángulo equilátero de lado 1 pie, se divide cada lado en tres partes iguales y sobre el segundo tercio de cada lado se quita un triángulo equilátero que apunta hacia adentro. Y continua este proceso para *n* pasos. En las siguientes figuras se muestran los diseños de collares para las etapas *1, 2, 3* y *4*



Para engalanar cada modelo de la joya se colocó sobre el borde de la figura un fino hilo de oro cuyo costo es de 0.05 rupias el pie. Las joyas fueron talladas sobre una lámina de oro cuyo costo es de 0.1 rupias el pie cuadrado. El precio de venta de cada collar es inversamente proporcional al área de la misma, esto es, cuanto más pasos demande la construcción más cara será la joya. Mientras que el costo de fabricación del mismo depende directamente del costo de los materiales usados. La joyería desea saber cuál es el tipo de collar que le reportará el mayor beneficio. Para ello se les pide analizar los costos de producción e ingresos según el nivel de complejidad de fabricación de la joya, esto es, cuando las etapas de fabricación crecen sin límites.

Actividades desarrolladas por estudiantes de Nivel Polimodal.
La actividad se realizó en el horario habitual de clases de Matemática durante dos módulos (160 minutos), en un curso de 24 alumnos cuyas edades son 14 y 15 años. La clase se organizó en grupos de dos alumnos. Junto al enunciado del problema se entregó a cada

grupo ampliaciones de los diseños de los collares para *n=1, 2, 3 y 4*. Tres grupos solicitaron además las correspondientes a *n=5* y *6*.
Cabe destacar que todos trabajaron con calculadoras científicas.
Algunos grupos no pudieron superar el segundo paso, hallando solamente el perímetro y la superficie del triángulo equilátero del paso uno y calculando el costo, el precio de venta y el beneficio para ese tipo de collar.
El grupo formado por Florencia y Lola logrón avanzar en sus formulaciones: Presentamos a continuación las anotaciones que realizaron para calcular el área y el perímetro correspondiente a la etapa 3.
Partiendo de la figura obtenida en el paso 2 (Figura 1-b), cuya área es $0{,}2887\,pies^2$

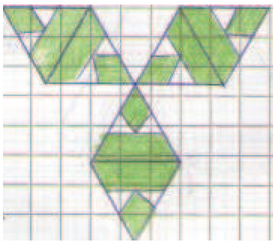


Figura 1-a

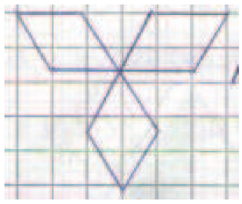


Figura 1-b

y realizando la figura correspondiente al paso 3 (Figura 1-a) determinan que ella está compuesta por 6 triángulos equiláteros iguales (Figura 1-c) .

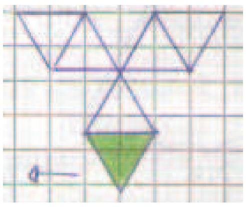


Figura 1-c

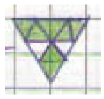


Figura 1-d

Entonc[illegible] uno de esos triángulo será la sexta parte del área de la figura que corresponde al paso 2: $0{,}28867/6 = 0{,}04811$. Dividiendo cada uno de esos triángulos en 9 equiláteros iguales se obtiene la Figura 1-d, y el área de cada uno de estos triángulos será a su vez la novena parte de $0{,}04811$ esto es $0{,}0003655$. Como la figura 1-d contiene 7 de estos triángulos entonces su área será $0{,}0003655\times 7$. Entonces el área total de la figura que corresponde al paso 3 es $0{,}03741\times 6 = 0{,}22451$
El grupo formado por Federico y Nicolás presentó una manera muy ingeniosa de plantear el problema. Por este motivo se les solicitó que presentaran un informe de su trabajo usando gráficos, tablas, etc. Como ellos estaban familiarizados con el uso del software DERIVE 5, usaron este recurso para presentar la solución del problema.
En su informe mostraron la siguiente tabla obtenida a partir de la visualización de las distintas figuras y de los cálculos realizados con calculadora:

Paso	Cantidad de lados (QL)	Longitud de cada lado	Cantidad de Triángulos (Qσ)	Perímetro	Superficie de cada triángulo	Superficie total
1	3	1	1	3	0,4330	0,4330
2	12	1/3	6	4	0,04811252	0,288675

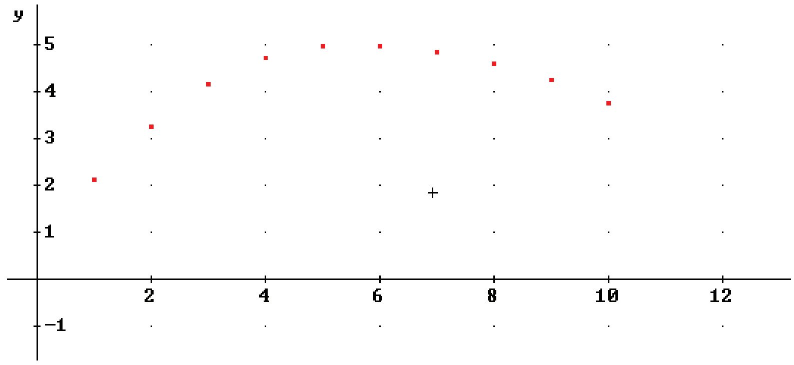


Figura 2

3	48	1/9	42	5,33333	0,00534853	0,224525104
4	192	1/27	330	7,11111	0,000593981	0,1961398
5	768	1/81	2778	9,481481	0,000065997	0,183342369

De la observación de esta tabla generaron los siguientes patrones que les permitieron generalizar:

- *Cada triángulo se va dividiendo en nueve triángulos, donde el área de cada uno es* $\frac{1}{9}$ *de la del paso anterior.*
- *Cada lado se va dividiendo en 4 lados de longitud* $\frac{1}{3}$ *de la longitud del lado del paso anterior.*
- *La cantidad de triángulos (Qσ) de un paso es igual a la cantidad de triángulos del paso anterior por 9, menos la cantidad de lados del paso anterior, porque a cada lado se le resta un triangulito.*

Verificaron sus afirmaciones para las sucesivas etapas respecto a la cantidad de triángulos y la cantidad de lados.

$QL1 = 3$

$Q\sigma1 = 1$

$QL2 = QL1 \times 4 = 12$

$Q\sigma2 = (Q\sigma1 \times 9) - QL1 = (1 \times 9) - 3 = 6$

$QL3 = QL2 \times 4 = 12 \times 4 = 48$

$Q\sigma3 = (Q\sigma2 \times 9) - QL2 = (6 \times 9) - 12 = 42$

$QL4 = QL3 \times 4 = 48 \times 4 = 192$

$Q\sigma4 = (Q\sigma3 \times 9) - QL3 = (42 \times 9) - 48 = 330$

$QL5 = QL4 \times 4 = 192 \times 4 = 768$

$Q\sigma5 = (Q\sigma4 \times 9) - QL4 = (330 \times 9) - 192 = 2778$

Para continuar su trabajo, utilizando el software introdujeron las expresiones que les permitieron calcular la cantidad de triángulos y la cantidad de lados definiéndolas por recursión, y comprobaron que en las diferentes etapas los resultados obtenidos coincidían con los obtenidos por ellos usando la calculadora. Plantearon las ecuaciones que les permitieron calcular el precio de venta, el costo de fabricación y el beneficio y realizaron la gráfica (Figura 2) que representa el beneficio en función del número de pasos.

De la observación de la gráfica obtenida y usando el Zoom determinaron que el beneficio mayor corresponde al collar fabricado en el paso 6.

Actividades desarrolladas por estudiantes universitarios.
Se trabajó con un grupo de 10 alumnos que habían cursado la asignatura Análisis I y que solicitaron consultas antes de rendir el examen final de la materia sobre el tema límite de sucesiones y series infinitas. En este encuentro se les propuso la resolución del problema. Del trabajo en duplas, reportaremos la solución obtenida por el grupo formado por Luciana y Fernanda.
En primer lugar calcularon el perímetro de los distintos modelos. Así, determinaron el perímetro del triángulo equilátero de lado un pie, $P_1 = 3$.
La siguiente figura tiene doce lados y cada lado mide $1/3$ entonces $P_2 = 12 \cdot 1/3 = 3\,.\,4/3$. De la misma manera $P_3 = 3 \cdot (4/3)^2$. Continuando con este proceso generalizaron que el perímetro para *n* iteraciones es $P_n = 3\,.\,(4/3)^{n-1}$.
Posteriormente calcularon el área de esos modelos. Para el triángulo equilátero obtuvieron $A_1 = \sqrt{3}/4$.
El área de la siguiente figura resulta igual al área del triángulo original menos el área de tres pequeños triángulos, siendo cada una de ellas la novena parte de A_1, entonces $A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3)$ y para el paso tres de la figura anterior se quitan 12 triángulos de área $\left(\frac{1}{9}\right)^2$, por lo tanto el área correspondiente a *n=3* es

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)(3) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^2(3)(4)\,.$$

Así en forma inductiva afirman que en cada paso se extraen 4 veces tantos nuevos triángulos como se sacaron en el paso anterior y cada uno de estos triángulo tiene un área $\frac{1}{9}$ del área del triángulo anterior.

Generalizando obtuvieron que : $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k\right)$

Observaron que en la fórmula hallada aparece la suma de n-términos de una progresión geométrica de razón $\frac{4}{9}$, que es igual a $\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}$. Entonces $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right)$.

Habiendo hallado las expresiones para calcular el área y el perímetro de las sucesivas figuras, plantearon las ecuaciones que les permitirían calcular el costo de fabricación, el precio de venta y el beneficio.

Con la ayuda del software (Derive 5) construyeron tablas y graficaron las respectivas funciones. Mostramos a continuación la gráfica que representa a cada una de ellas (Figura 3).

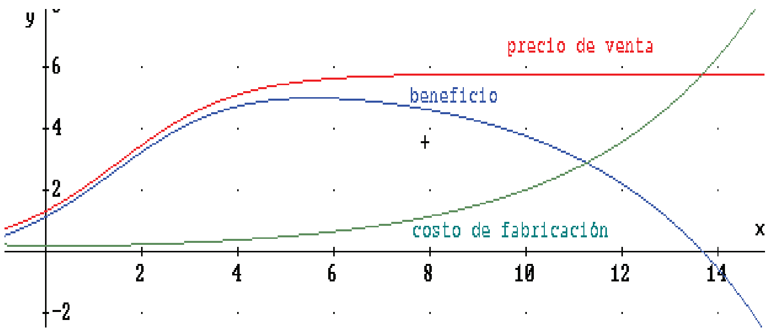


Figura 3

Observando la gráfica de la función Beneficio y haciendo uso del Zoom comprueban que el máximo de esta función está entre 5 y 6. Haciendo uso del Cálculo Diferencial, determinan que el beneficio máximo corresponde a $n = 5{,}572255180$.
Respondiendo al pedido formulado, el beneficio máximo corresponde al modelo de collar obtenido en paso 6. Y en ese caso el beneficio será de aproximadamente 4,977258354 rupias.
También la visualización de la gráfica les permitió conjeturar:

- La función costo es creciente.
- La función precio cuando n tiende a infinito se aproxima a un valor constante.

La docente les solicitó que justifiquen la segunda observación. Esto permitió determinar que cuando n tiende a infinito el área estará representada por una expresión que contiene una serie geométrica convergente y en ese caso el área será constante e igual a $\frac{\sqrt{3}}{10}$. Luego, el precio de venta cuando n tiende a infinito se aproxima al valor $\frac{10}{\sqrt{3}}$.

Conclusiones

Los caminos elegidos por los estudiantes dependieron de su formación. Los estudiantes de Nivel Polimodal aprenden primero a reconocer las formas como un todo y luego a analizar sus propiedades. Posteriormente, pueden ver las relaciones entre las formas y hacer deducciones simples. Ellos realizaron sus análisis mediante el uso de tablas usando funciones discretas para calcular el perímetro y el área y confiaron en los gráficos de estas funciones para predecir el beneficio máximo.
Los estudiantes universitarios determinaron expresiones generales para calcular el área y el perímetro en función del número de etapas y resolvieron el problema de optimización del beneficio usando cálculo diferencial.
La actividad desarrollada en duplas se vio favorecida por el diálogo siendo el estilo de comunicación característico para esta investigación pues, es por medio del diálogo que ocurren las negociaciones y significados en el aula. Esto permitió a los estudiantes no paralizarse ante las dificultades, tomar decisiones para organizar el trabajo y tener un control sobre las equivocaciones y las interpretaciones.

La actividad propuesta permitió que los alumnos percibieran las matemáticas como un conocimiento con valor práctico para la resolución de problemas dentro de un proceso de modelación de la realidad en el que les fue posible utilizar diversas estrategias.
Según lo expresado por Biembengut & Hein (2000) "Modelaje Matemático es el proceso involucrado en la obtención de un modelo. Este proceso, desde cierto punto de vista puede ser considerado artístico, ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas".
Acordamos con ello y enfatizamos que el uso de modelación en la resolución de problemas es un proceso para desarrollar capacidades en general y actitudes en los estudiantes, tornándolos creativos, y habilidosos en la resolución de problemas.

Bibliografía

Araújo, J. L. (2002) Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. Bolema - Boletim de Educação Matemática, Río Claro, n.14, p. 66-91.

Barbosa, J.C. (2001) Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. Río Claro: UNESP. Tesis de Doctorado en Educación Matemática.

Bassanezi, R (2002). Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. São Paulo: Contexto.

Bassanezi, R. (1990). Modelagem Aprendizagem. Boletín Sociedad Brasilera de Matemática Aplicada.

Bassanezi, R. (1994.) Modelling as a teaching-learning strategy. For the Learning of Mathematics, 14, n.2, 31-35.

Biembengut, M. S. (2004) PADEM –1: Modelación Matemática para la enseñanza. Memorias del VI Simposio de Educación Matemática. Edumat. ISBN Nº 987-20239-2-1

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2000) Modelo, modelación y modelaje: métodos de enseñanza - aprendizaje de matemáticas. QUBO Boletín del docente de Matemática del Bachillerato Peruano, v.1, n.3.

Biembengut, M., HEIN, N. (1999) Modelación matemática: estrategia para enseñar y aprender matemáticas. Educación Matemática, v. 11, n. 1, p. 119 – 134.

Blomhøj, M. (2004) Mathematical modelling - A theory for practice. En: Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B.; Lambdin, D.; Lester, F. Walby, A. & Walby, K. (Eds.) International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education. Suecia, p. 145-159.

Borba, M., Meneghetti, R. & Hermini, H. (1997.). Modelagem, calculadora gráfica e interdiscipilinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 3, 63-70.

Borba, M.; Bovo, A. (2002) Modelagem em sala de aula de matemática: interdisciplinaridade e pesquisa em bilogia. Revista de Educação Matemática, v. 8, n. 6-7, p. 27-33.

Etcheverry, N; Torroba, E.; Reid, M.; Evangelista, N. (2003a) El trabajo interdisciplinario aliado al Modelaje Matemático. Libro de Resúmenes de la XVII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, p. 280. Santiago de Chile,.

Etcheverry, N; Torroba, E.; Reid, M.; Evangelista, N. (2003b) Modelaje Matemático: Area finita perímetro infinito. Libro de Resúmenes de la III Conferencia Argentina de Educación Matemática, p. 185. Salta.