LOS TRES MOSQUETEROS: ROLLE, LAGRANGE Y CAUCHY
(UNO PARA TODOS Y TODOS PARA UNO)

Norberto Rossi, Gloria Suhit
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Bahía Blanca. Argentina
gsuhit@criba.edu.ar; nrossi@frbb.utn.edu.ar

Campo de investigación: Gráficas y funciones; Nivel educativo: Superior.

RESUMEN

Exponemos aquí una presentación gráfica unificada de los Teoremas del Valor Medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) destinada a los alumnos de Cálculo o Análisis Matemático del primer año de Universidad. La intención es ofrecer al estudiante la posibilidad de *ver* (en el más literal sentido de la palabra) a los tres teoremas como una unidad conceptual, siguiendo un camino que permita *construir* las ideas en lugar de la vía de la *verificación* (típica de las demostraciones de Lagrange y Cauchy). Para ello, luego de la presentación clásica del Teorema de Rolle, introducimos como recurso didáctico la idea de la deformación del gráfico característico de su interpretación geométrica para poder *ver*, *analizar* y *deducir* relaciones entre los incrementos y las derivadas de tres funciones *f*, *g* y *h* definidas en un intervalo $[a,b]$ (todas continuas y derivables, con $h = f - g$).

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se ha postulado con insistencia la utilidad del uso de herramientas gráficas, en matemática educativa, que hagan posible "establecer un isomorfismo operativo entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico" (Cantoral et al., 2003) como un medio idóneo para promover el aprendizaje de nociones y conceptos matemáticos.

En un todo de acuerdo con esta posición, exponemos en este trabajo una presentación gráfica unificada de los teoremas del valor medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) destinada a los alumnos de Cálculo o Análisis Matemático del primer año de Universidad.

Para comenzar reseñamos la forma clásica de presentación de los tres teoremas (y sus respectivas interpretaciones geométricas) en los textos universitarios:

ROLLE: Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $f(a) = f(b)$; entonces existe al menos un *c* perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{f'(c) = 0}$$

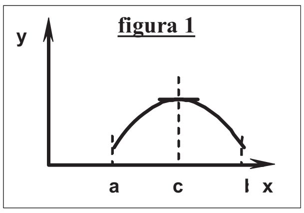


figura 1

Interpretación geométrica (infaltable): Existe un punto C = (*c*,*f*(*c*)) (figura 1) donde la recta tangente al gráfico de *f*(*x*) es paralela al eje *x* (horizontal si el eje *x* es horizontal).

LAGRANGE (Teorema del Valor Medio): Sea *f* una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b); entonces existe al menos un *c* perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

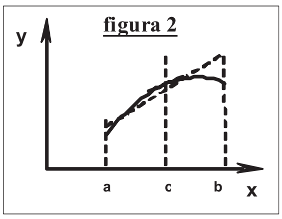


figura 2

Interpretación geométrica (infaltable):

Existe un punto $C=(c,f(c))$ (figura 2) donde la recta tangente al gráfico de $f(x)$ es paralela a la recta secante que pasa por $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$.

CAUCHY (Teorema Generalizado del Valor Medio): Sean f y g dos funciones continuas en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivables en el intervalo abierto (a,b) y tal que $g'(x)\neq 0$ para todo x en (a,b); entonces existe al menos un c perteneciente al intervalo (a,b) tal que:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Interpretación geométrica:

a) En algunos textos no existe.

b) Si existe: en al menos un c en (a,b) el cociente de las pendientes de las rectas tangentes a f y g es igual al cociente de las pendientes de las secantes a los gráficos de f (por $(a,f(a))$ y $(b,f(b))$) y de g (por $(a,g(a))$ y $(b,g(b))$).

Observación (siempre presente): Si $g(x)=x$ el Teorema Generalizado del Valor Medio de Cauchy se reduce al Teorema de Lagrange.

Esta observación establece el nexo entre los teoremas de Cauchy y Lagrange y justifica el nombre de Teorema Generalizado del Valor Medio al exponer a Lagrange como un caso particular de Cauchy.

En textos recientes (Larson y Hostetler, 1989; Stewart, 1998) luego de los teoremas de Rolle y Lagrange se presenta la regla de L´Hôpital (sin su demostración) para el cálculo de límites indeterminados. El Teorema de Cauchy (con su demostración) y la demostración, a partir de Cauchy, de la regla de L´Hôpital se encuentran en un apéndice separado. Creemos que esto se debe a que para el curso de Cálculo las formas *operativas* del teorema del valor medio son Rolle y Lagrange y la regla de L´Hôpital una de sus más consagradas *consecuencias operativas*. El Teorema de Cauchy se ve relegado al papel de *trampolín* necesario para la demostración de la regla de L´Hôpital, induciendo así que todo intento de interpretación geométrica del mismo se haga desde el punto de vista de la regla de L´Hôpital (pendientes de secantes y tangentes) pasando por alto cualquier esfuerzo por unificar conceptualmente a los tres teoremas del valor medio. Es muy probable que la decisión de darle esta forma al discurso escolar se deba a la necesidad de compatibilizar los objetivos en la formación de los estudiantes con los tiempos disponibles para alcanzar esos objetivos.

Luego de esta presentación clásica observamos que los estudiantes:

a) Consideran al Teorema de Cauchy como un *accesorio* de la regla de L´Hôpital.

b) Ven como la clave central en su demostración a la *invención* de la función $h(x)=(g(b)-g(a)).(f(x)-f(a))-(f(b)-f(a)).(g(x)-g(a))$ que verifica Rolle.

c) No encontrarían vínculos evidentes entre los tres teoremas si no fuera por la observación: Si $g(x)=x$ el teorema generalizado del valor medio de Cauchy se reduce al teorema de Lagrange.

Sobre la base de estas observaciones nos preguntamos:

¿Por qué no dar una interpretación geométrica que permita ver al teorema de Cauchy en un gráfico que complete una secuencia natural con los gráficos de los teoremas de Rolle y Lagrange?, ¿no será posible?, ¿es muy difícil?, ¿no la entenderían los estudiantes?, ¿demandaría demasiado tiempo?, ¿es innecesaria o inútil?.

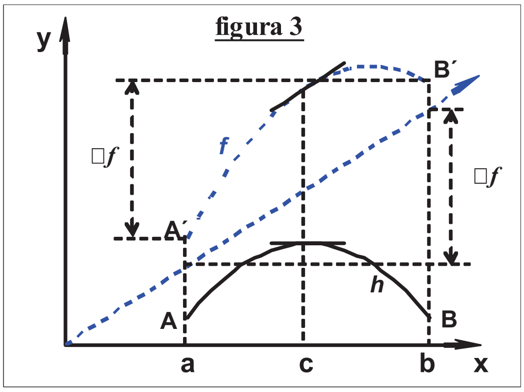
A continuación nuestra propuesta.

LA PROPUESTA

El Teorema de Rolle: No introducimos ningún cambio. Conservamos la demostración y la interpretación geométrica clásicas.

El Teorema de Lagrange: ¿Qué le pasaría al gráfico de una función *h* que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle si sufriera una deformación como la de la figura 3?

Con referencia al sistema cartesiano original el eje *x* se desplaza a la posición $y = \mathrm{m}.x$ y el arco AB (gráfico de la función *h*) se desplaza a la posición A´B´ que corresponde a una función $f(x) = h(x) + \mathrm{m}.x$. Esta función tiene derivada $f\,'(x) = h\,'(x) + \mathrm{m}$, es decir para cada x en (a,b) la pendiente de la recta tangente en $(x, f(x))$ es igual a la pendiente en $(x, h(x))$ aumentada en m unidades. Como h verifica Rolle existe al menos un c en (a,b) tal que $h\,'(c) = 0$ y por lo tanto $f\,'(c) = \mathrm{m}$; o sea, existe en A´B´ al menos un punto $(c, f(c))$ donde la recta tangente tiene pendiente m. Además es $\Delta f = f(b) - f(a) = h(b) + \mathrm{m}.b - h(a) - \mathrm{m}.a = h(b) - h(a) + \mathrm{m}.(b-a) = 0 + \mathrm{m}.(b-a)$ entonces $\mathrm{m} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$; en términos geométricos: la pendiente de la recta secante que pasa por A´ y B´ es igual a la pendiente de la recta tangente en $(c, f(c))$, o sea:

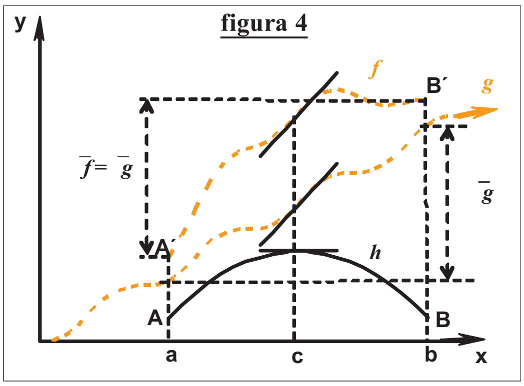


$$\boxed{f\,'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}}$$

El Teorema de Cauchy: ¿Qué le pasaría al gráfico de una función *h* que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle si sufriera una deformación como la de la figura 4?

Con referencia al sistema cartesiano original el eje x se desplaza a una posición $y = g(x)$ (con g continua, derivable y $g'(x) \neq 0$) y el arco AB (gráfico de la función *h*) se desplaza a la posición A´B´ que corresponde a una función $f(x) = h(x) + g(x)$.

Como h verifica Rolle existe al menos un c en (a,b) tal que $h'(c) = 0$ y por lo tanto $f'(c) = h'(c) + g'(c) = g'(c)$, es decir que existe en A´B´ al menos



un punto $(c, f(c))$ donde la recta tangente es paralela a la recta tangente al gráfico de $g(x)$ en $(c, g(c))$.

Por otra parte es:
$f(b)-f(a)=h(b)+g(b)-h(a)-g(a)=h(b)-h(a)+g(b)-g(a)=0+g(b)-g(a)=g(b)-g(a)$
es decir *f* y *g* tienen el mismo incremento en $[a,b]$.

En otras palabras: Si dos funciones *f* y *g* son continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b) y $f(b)-f(a)=g(b)-g(a)$ su diferencia $h(x)=f(x)-g(x)$ no solo es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) si no que además $h(b)-h(a)=0$ y, por el Teorema de Rolle, existe al menos un *c* en (a,b) tal que $h'(c)=0$. Como $h'(c)=f'(c)-g'(c)=0$ se concluye que $\boxed{f'(c)=g'(c)}$ para al menos un *c* en (a,b) y los gráficos de *f* y *g* tienen rectas tangentes, en $(c, f(c))$ y $(c, g(c))$ respectivamente, paralelas entre sí.

Este resultado es sólo un caso particular del teorema generalizado del valor medio (cuando $\Delta f = f(b)-f(a)=g(b)-g(a)=\Delta g$) y no se puede aplicar directamente a los diversos pares de funciones *f* y *g* que verifican las hipótesis del teorema.

Sin embargo, observando que:

1. Dada una función *g* continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y tal que $g'(x)\neq 0$ para todo *x* en (a,b) la función $g_1(x)=\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ verifica las mismas condiciones que *g*, con el agregado que $g_1(b)-g_1(a)=\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(b)-\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right).g(a)=\left(\dfrac{g(b)-g(a)}{g(b)-g(a)}\right)=1$; es decir, el factor $\left(\dfrac{1}{g(b)-g(a)}\right)$ hace unitario el incremento de $g_1(x)$ en $[a,b]$.
2. Multiplicando $g_1(x)$ por el factor $(f(b)-f(a))$ se logra que la función $g^*(x)=(f(b)-f(a)).g_1(x)=\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ tenga en $[a,b]$ el mismo incremento que $f(x)$, conservando las características originales de $g(x)$ en cuanto a continuidad, derivabilidad y, si $f(b)\neq f(a)$, también $g^{*\prime}(x)\neq 0$ para todo *x* en (a,b).

Concluimos que la función $h(x)=f(x)-g^*(x)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en $[a,b]$, lo que implica que $h'(c)=0$ para al menos un *c* en (a,b) y, por lo tanto: $f'(c)=g^{*\prime}(c)=\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g'(c)$, o sea:

$$\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Esto corresponde a la situación mostrada en la figura 5 donde el gráfico de la función *h* que verifica Rolle sufre una deformación (definida por $g^*(x)$) en el eje *x*, que lleva el arco AB a la posición A´B´ correspondiente a la función $f(x) = h(x) + g^*(x)$.

En este caso el factor $\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\right)$ produce un escalamiento de la función g para lograr que $\Delta f = f(b) - f(a) = \Delta g^* = g^*(b) - g^*(a)$ y que, en consecuencia, siempre podamos tener una $h = f - g^*$ que verifica las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a,b]$, lo que asegura, como se ve en la figura 5, que exista al menos un c en (a,b) donde $f'(c) = g^{*\prime}(c)$ (dicho en términos geométricos: asegura la existencia de un punto $(c, f(c))$ en el gráfico de f donde la recta tangente es paralela a la recta tangente en $(c, g^*(c))$ al gráfico de $g^*(x)$).

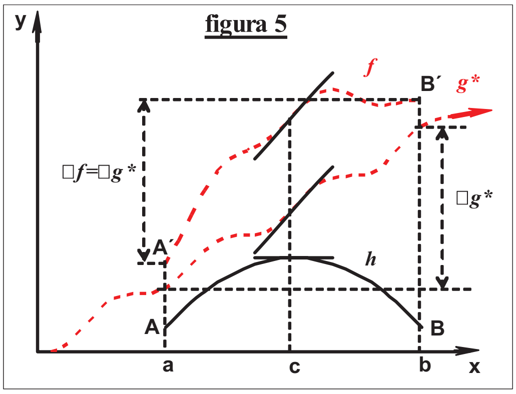


figura 5

UN POCO DE ANÁLISIS

Este enfoque gráfico permite *ver* a los teoremas de Lagrange y Cauchy operando de manera análoga sobre el gráfico de una función que verifica Rolle, poniendo de manifiesto la idea central en la demostración de ambos teoremas: la vinculación de las hipótesis de cada uno con una situación donde es aplicable Rolle.

Si la razón para que los textos interpreten gráficamente a los teoremas de Rolle y Lagrange pero no al de Cauchy es que en los primeros se hace referencia a una única función y en el último a dos funciones, debemos señalar que en la demostración del Teorema de Lagrange (a partir de una función $h(x) = f(x) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right).x$) ya aparece una segunda función (lineal y no constante) con la particularidad de tener en $[a,b]$ un incremento igual al de f (y, por lo tanto, la función h presenta un incremento nulo en $[a,b]$), aunque el enunciado solo hace referencia a la f porque las hipótesis y la tesis se refieren exclusivamente a ella. En el caso de Cauchy la segunda función (g^*) es más general, pero igual que en Lagrange nos permite obtener una función h que verifica Rolle en $[a,b]$.

Por lo tanto las analogías se tornan más evidentes cuando se analizan los caminos de las respectivas demostraciones. Este tipo de relaciones son las que pretendemos mostrar a los estudiantes, no siguiendo las demostraciones clásicas que llevan por la vía de la *verificación* si no a través de un camino que permita *construir* las ideas a la par de *verlas* en un gráfico.

Un ejemplo de los frutos de esta construcción es la percepción, a partir de las figuras 3 y 5, que el Teorema de Lagrange es un caso particular del Teorema de Cauchy cuando g sea *cualquier función lineal no constante* y no solamente si $g(x) = x$.

Efectivamente, si $g(x) = \mathrm{m}.x + \mathrm{n}$ es $g(b) - g(a) = \mathrm{m}.b + \mathrm{n} - \mathrm{m}.a - \mathrm{n} = \mathrm{m}.(b - a)$ y además $g\,'(x) = \mathsf{m}$ de donde $\dfrac{f\,'(c)}{g\,'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ se reduce a $\dfrac{f\,'(c)}{\mathsf{m}} = \dfrac{f(b)-f(a)}{\mathsf{m}(b-a)}$ o sea:

$$\boxed{f\,'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

CONSIDERACIONES FINALES

La intención de esta propuesta es ofrecer al estudiante de Cálculo (o Análisis Matemático) la posibilidad de *ver* (en el más literal sentido de la palabra) a los Teoremas del Valor Medio (Rolle, Lagrange y Cauchy) como una unidad conceptual. Para ello, luego de la presentación clásica del Teorema de Rolle, introducimos como recurso didáctico la idea de la deformación del gráfico característico de su interpretación geométrica. La manera de presentar esta deformación puede variar de acuerdo a los gustos de los estudiantes y docentes involucrados; por ejemplo, se podría decir:

a) Que el programa que grafica la función en la computadora fue afectado por un *virus* que deformó el gráfico.
b) Que al gráfico le dio una *chiripioica* (si don Roberto Gómez Bolaños no se opone).

La segunda alternativa nos parece más apropiada (y, sobretodo, más *descriptiva*) para el ambiente educativo latinoamericano, cada uno podrá idear la suya, esto no es lo esencial.

Lo esencial es poder ver y analizar que dada una función $f = h + g$, si $\Delta h = 0$ en $[a,b]$ entonces $\Delta f = \Delta g$ en $[a,b]$; o, a la inversa, que si $\Delta f = \Delta g$ en $[a,b]$ entonces $h = f - g$ verifica que $\Delta h = 0$ en $[a,b]$. Si además f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) la función h verifica las hipótesis de Rolle, lo que implica que $h\,'(c) = 0 = f\,'(c) - g\,'(c)$ o sea: $f\,'(c) = g\,'(c)$ para al menos un c en (a,b). Hablando geométricamente: El gráfico de *f* tiene recta tangente en el punto $(c, f(c))$ paralela a la recta tangente en $(c, g(c))$ al gráfico de *g*.

En el caso más general, cuando $\Delta f \neq \Delta g$ en $[a,b]$, se puede *escalar* el incremento de una de ellas (la que tenga derivada no nula en (a,b)) poniendo $g^*(x) = \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\right).g(x)$ para volver a la situación anterior.

Al momento de la redacción de este trabajo la propuesta no ha sido suficientemente ensayada en el aula como para extraer conclusiones o presentar resultados concretos. A pesar de ello confiamos en los beneficios derivados del cambio del camino de la verificación (en Lagrange y Cauchy) por el de la construcción de las relaciones y vínculos entre los tres teoremas siguiendo la secuencia: ver, analizar y deducir.

Esperamos haber dado una respuesta (seguramente ni la única ni la mejor) a los interrogantes planteados en la introducción. Una vez completada la (irremplazable) experiencia de aula reportaremos resultados y eventuales cambios en la propuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Anton, H. (1984) *Cálculo y Geometría Analítica*. México: Limusa.

Cantoral, R.; Farfán, R., Cordero, F.; Alanís, J.; Rodríguez, R.; Garza, A. (2003) Tratamiento matemático y calculadoras gráficas. pp. 174 *Desarrollo del Pensamiento Matemático.* México: Editorial Trillas.

Larson, R. y Hostetler, R.(1989) *Cálculo y Geometría Analítica*. España: McGraw-Hill / Interamericana.

Stewart, J. (1998) *Cálculo*. México: International Thomson Editores.