

PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN POR MAESTROS EN FORMACIÓN

Planning of teaching the concept of fractions by pre-service elementary teachers

Elena Castro Rodríguez^a, Luis Rico^a, Pedro Gómez^b

^aUniversidad de Granada, ^bUniversidad de los Andes

Resumen

En este documento indagamos sobre algunos aspectos del conocimiento didáctico que un grupo de maestros de primaria en formación inicial ponen en juego al redactar un texto cuyo propósito es iniciar a los escolares de primaria en la noción de fracción. Usamos algunas de las categorías del análisis didáctico para analizar las producciones de los futuros maestros. Los resultados destacan los conocimientos que los participantes seleccionan, como el concepto de numerador y denominador, la suma y resta de fracciones o el concepto de unidad, y el modo en que los introducen en sus propuestas.

Palabras clave: *Conocimiento didáctico del profesor, formación de maestros, fracciones.*

Abstract

In this paper we investigate about the pedagogical content knowledge that a group of preservice primary school teachers put into play when composing a text with which to start primary school students in the part-whole notion of fraction. To analyse the productions, we used a model of didactic analysis, through its content analysis categories. The results highlight the content of fractions that the participants selected, how they proposed to introduce this content in their responses.

Keywords: *Fractions, pedagogical content knowledge, pre-service teacher education.*

INTRODUCCIÓN

El conocimiento profesional de los profesores de matemáticas ha sido categorizado por diversos autores (Shulman, 1986; Grossman, 1990; Bromme, 1994; Ponte y Oliveira, 2002; Hill, Rowan y Ball, 2005). La mayor parte de ellos hacen una distinción entre el conocimiento del contenido, basado en la matemática como disciplina, y el conocimiento pedagógico o didáctico del contenido, entendido como aquel conocimiento que el profesor pone en juego para la enseñanza de los contenidos matemáticos. Estos tipos de conocimiento han sido foco de atención de la investigación en las últimas décadas (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2012). El interés de su estudio, radica entre otros, en la información que pueden aportar para la toma de decisiones sobre la formación inicial de profesores y la posterior mejora de la práctica en el aula de matemáticas.

Entre las distintas investigaciones realizadas sobre el conocimiento profesional, encontramos diversos estudios sobre el conocimiento didáctico de las fracciones (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Domoney, 2001; Fuller, 1996), centrados en las operaciones con fracciones (Li y Kulm, 2008; Isiksal y Cakiroglu, 2011; Charalambous, Hill y Ball, 2011) o en la equivalencia de fracciones (Chick, 2003; Marks, 1990). Todos ellos resaltan las carencias en sus conocimientos sobre fracciones que los maestros en formación presentan y por consiguiente en sus implicaciones para su enseñanza. Además Charalambous, Hill y Ball (2011) y Li y Kulm (2008) afirman que la

Castro-Rodríguez, E., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Planificación de la enseñanza del concepto de fracción por maestros en formación. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 11-25). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

falta de conocimiento del contenido sobre fracciones por parte de los profesores participantes en sus estudios, pudieran incidir en los niveles mostrados en su conocimiento didáctico del contenido. Esta estrecha relación entre el conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido nos condujo a centrarnos en un aspecto del conocimiento didáctico de los futuros maestros, su capacidad para seleccionar los contenidos apropiados para un propósito didáctico. El conocimiento didáctico del contenido implica estos y otros aspectos de las decisiones que el profesor toma en su proceso de planificación de la enseñanza.

Siguiendo esta línea, propusimos a los maestros que redactaran una explicación introductoria al concepto de fracción. Para ello, diseñamos una serie de ilustraciones que presentan los datos básicos de una relación parte-todo multiplicativa y pedimos a los maestros que redactaran una explicación con la que introducir la noción de fracción a partir de las imágenes presentadas. En la tarea propuesta, los participantes debían realizar una breve planificación sobre la enseñanza de las fracciones. Para ello, se basaron en los datos propuestos en las ilustraciones, además de poner en juego su conocimiento del contenido y su conocimiento didáctico del contenido. Para el análisis de las producciones consideramos útil el método de análisis didáctico, como base para organizar los aspectos del conocimiento didáctico de nuestro interés.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

Por análisis didáctico entendemos un procedimiento que, de manera ideal, debería realizar un profesor de matemáticas para “diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Al caracterizar, de manera ideal, el proceso de planificación del profesor, el modelo del análisis didáctico nos permite establecer aquellos aspectos del conocimiento didáctico del profesor que son relevantes para ese propósito (Gómez, 2006). Esos aspectos se organizan en tres tipos de análisis: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción. Estos análisis, han sido trabajados y utilizados en diversos estudios e investigaciones (Gómez, 2006; Lupiáñez, 2009; Valverde, 2012).

Dado que en este estudio nos centramos en los distintos aspectos del contenido que seleccionan los maestros en formación para realizar una introducción al concepto de fracción, abordamos el análisis de las producciones mediante el análisis de contenido y sus componentes asociadas.

Análisis de contenido

Mediante el análisis de contenido, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. Su propósito es la descripción de la estructura matemática, desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula. El análisis de contenido se articula por medio de un sistema de tres componentes: los sistemas de representación, la estructura conceptual y la fenomenología.

Estructura conceptual

La estructura conceptual incluye conceptos, propiedades, proposiciones y relaciones entre los conceptos, que se derivan de un contenido matemático (Gómez, 2006).

En el caso del concepto parte-todo de fracción consideramos los siguientes componentes básicos en su estructura: (a) el todo —T— que tomamos como punto de partida; (b) cada una de las n partes iguales en que se divide el todo —P—; (c) la relación — $R(P,T)=1/n$ — que expresa la relación entre una de las partes iguales P y el todo T ; y (d) el complementario C de la parte P — .

Representaciones

Los conceptos se muestran a través de diferentes tipos de símbolos escritos, gráficos, imágenes o el lenguaje hablado, y cada uno constituye una representación (externa) del concepto en cuestión (Hiebert y Carpenter, 1992). Las fracciones como relación parte-todo pueden ser representadas de múltiples formas como son representaciones verbales, gráficas, numéricas o simbólicas.

Fenomenología

La fenomenología muestra los sentidos de los cuales proceden y con los cuales se usan los conceptos, sentidos que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico; también muestra su conexión con las estructuras matemáticas. En el concepto parte-todo de fracción encontramos diversos sentidos, como son: división, reparto, medida o reconstrucción de la unidad.

OBJETIVO DE INVESTIGACIÓN

Este estudio se realizó con el objetivo de caracterizar el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de contenido, que presentan un grupo de maestros de primaria en formación cuando abordan una explicación para introducir el concepto de fracción.

MÉTODO

Sujetos

Los participantes de este estudio fueron 82 maestros en formación inicial que cursaban los estudios universitarios del Grado en Educación Primaria durante el curso académico 2011-2012. Los sujetos eran estudiantes del segundo curso de dicha titulación, matriculados en tres grupos distintos de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria.

Instrumento

La prueba se llevó a cabo al finalizar el bloque de aritmética, que conlleva el estudio de la enseñanza y aprendizaje de los números naturales, su estructura aditiva, su estructura multiplicativa y las fracciones. El instrumento de recolección de información que utilizamos en este estudio consta de diversas series de imágenes, cada una con tres tarjetas; las imágenes muestran objetos que son usuales en la introducción inicial de las fracciones. En la serie de tarjetas A incluimos ilustraciones de objetos que ejemplifican distintas magnitudes (longitud-cuerda, superficie-pizza, volumen-naranja) que dan lugar a las fracciones unitarias $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$.

La serie está formada por tres tarjetas distintas, que denominaremos A1, A2 y A3. Cada una de las ilustraciones presentes en las tarjetas muestra diferentes elementos básicos de una relación parte-todo multiplicativa: el todo o totalidad (T), las partes (P), y la relación entre una de las partes y el todo $P = 1/n T$. Las primeras ilustraciones de la tarjeta A1 (figura 1), muestran los objetos enteros, que representan, en cada caso, el todo del que se parte, con una, dos o tres dimensiones. En la tarjeta A2 se incluyen los objetos iniciales divididos en partes iguales (figura 1). Por último, en las ilustraciones de la tarjeta A3 se muestra la relación de una de esas partes con el todo del que procede (figura 1).

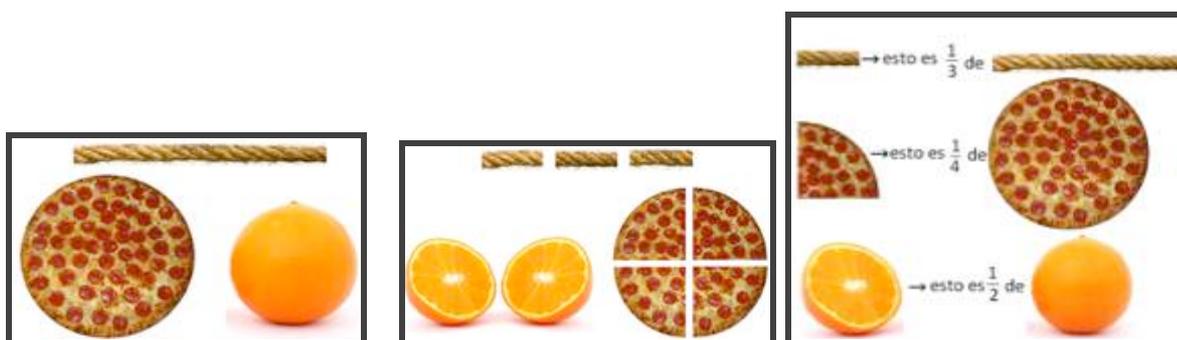


Figura 1. Tarjeta A1, A2 y A3

Además de estas tarjetas, se proporcionó una ficha de trabajo que incluía las instrucciones para que los sujetos, de manera individual, realizaran la tarea. Esta ficha, además de contener un registro inicial para la identificación de cada sujeto, incluye el enunciado de la tarea propuesta:

Las tres tarjetas que aparecen a continuación pueden usarse para ilustrar el concepto de fracción. Se desea elaborar un material para iniciar a los alumnos de primaria en las fracciones. Establece el orden en que las tarjetas deben aparecer y redacta el texto que debe ir antes y después de cada tarjeta (como si fuese un libro de texto para primaria).

Subrayamos la idea de que el grupo de escolares de primaria al que va dirigido el material es un grupo hipotético. No lo condicionamos a una edad y un nivel determinados; sólo se subraya la idea de que la actividad consiste en una introducción o iniciación al concepto de fracción.

Las ilustraciones fueron impresas como pegatinas para que pudiesen ser manejadas e insertadas libremente a criterio del estudiante durante el proceso de elaboración de la narración. La finalidad de la tarea es inducir a los sujetos a una situación docente, simulando las imágenes de un libro de texto escolar o de una ficha de trabajo. Para ello, dimos las ilustraciones de ese supuesto libro o ficha, y pedimos a los maestros que las ordenaran y que escribieran un texto que acompañara y explicara cada imagen.

Procedimiento

Para detectar y solventar posibles errores de interpretación y para que los maestros en formación se familiarizaran con la actividad, se realizó una prueba piloto, dos semanas antes, en la que los sujetos debían realizar una tarea similar sobre el concepto de multiplicación. La prueba piloto mostró que la actividad era clara, por lo que el procedimiento seguido y el tipo de material proporcionado para la actividad final fue similar al utilizado en la prueba piloto.

Durante el desarrollo de una sesión de clase, se entregó a cada uno de los sujetos una ficha y una de las series de tarjetas. Una vez distribuido todo el material, se les explicó cómo realizar la actividad y se respondió a las dudas que surgieron. Todos los estudiantes finalizaron la actividad en un tiempo máximo de media hora.

Codificación y análisis

En el análisis hemos utilizado técnicas cualitativas, cuyo objetivo es organizar y caracterizar las producciones a través del sistema de categorías del análisis de contenido procedentes de nuestro marco teórico.

En una primera etapa, uno de los investigadores identificó las unidades de análisis de cada una de las respuestas —oraciones o fragmentos de oraciones— correspondientes con cada una de las categorías de análisis, y agrupó aquellos datos que eran iguales o variaciones de la misma idea. Estas agrupaciones de datos similares se identificaron como subcategorías. Además, tras esta primera revisión de todas las respuestas, fue necesario ampliar las subcategorías, pues de los datos surgieron otras nuevas no contempladas.

Más tarde, en una segunda etapa, las subcategorías fueron validadas por el resto de investigadores. Los casos en los que hubo discordancia fueron discutidos y comparados hasta que no hubo desacuerdos.

RESULTADOS

Se obtuvieron un total 82 respuestas. A continuación presentamos un ejemplo de respuesta a la tarea.

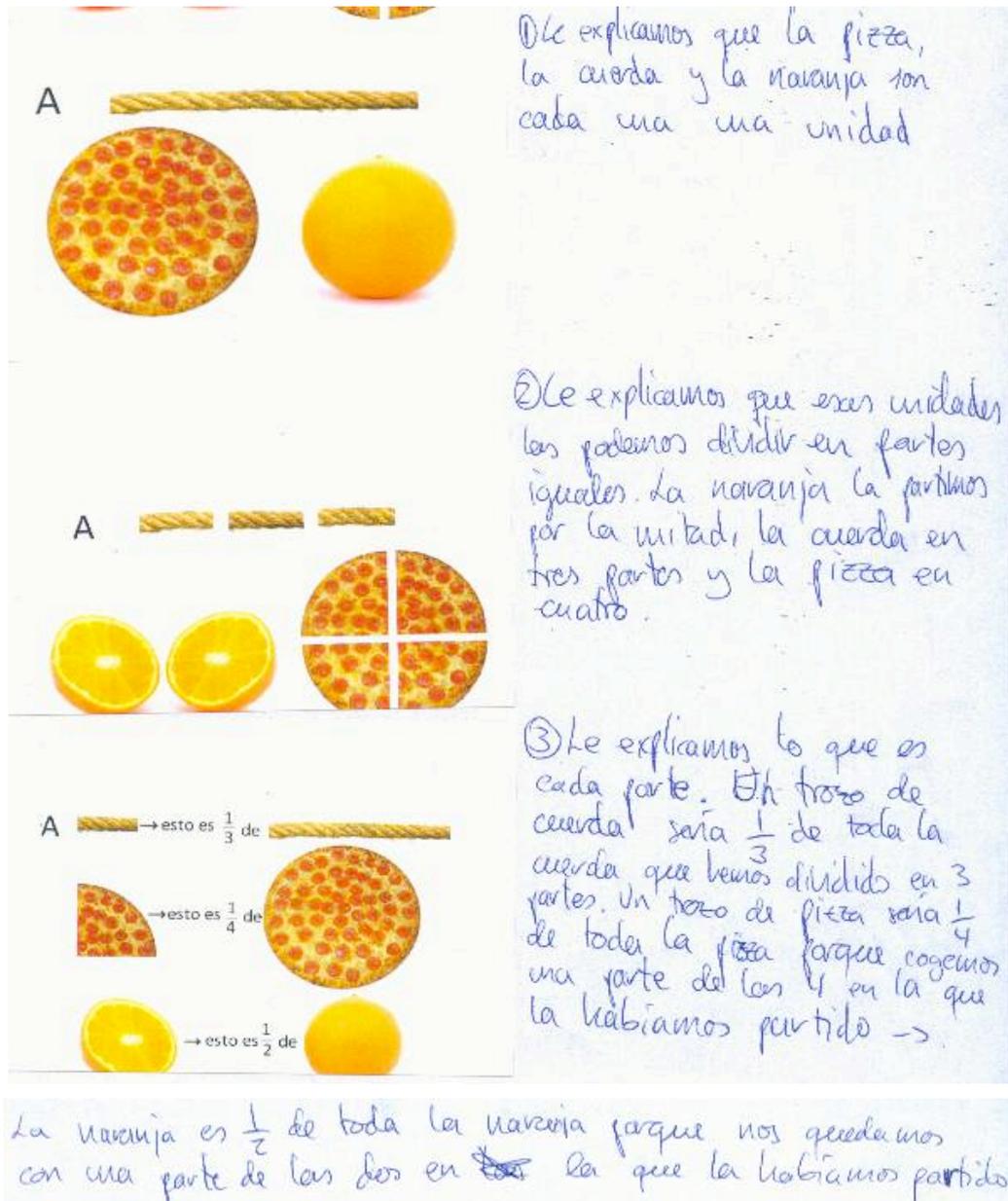


Figura 2. Ejemplo de narración realizada por un estudiante

En una instrucción inicial sobre el concepto de fracción no es posible poner en juego todos los elementos del contenido del tema. Por ello, al realizar una explicación, los sujetos seleccionan aquellas componentes del concepto que conocen y/o eligen los que les parecen más adecuados para comunicar los nuevos conocimientos e iniciar y guiar el aprendizaje de los escolares. Estos conocimientos manifestados fueron codificados según cada una de las componentes del análisis del contenido: estructura conceptual, fenomenología y representaciones. Estas tres componentes permiten identificar, analizar e interpretar las producciones realizadas por los maestros en formación en términos de aquellos aspectos del contenido que seleccionan para realizar una introducción al concepto de fracción.

Nuestro propósito no fue caracterizar las respuestas como correctas o incorrectas. Buscamos describir el conocimiento expresado por los sujetos y clasificarlo en categorías. Los resultados se presentan en tres secciones que corresponden a las tres componentes del análisis de contenido consideradas.

Datos sobre la estructura conceptual

En nuestro análisis identificamos conceptos y procedimientos distintos de los presentes en las ilustraciones que los sujetos añaden como conocimiento adicional en sus respuestas. Como vemos en el ejemplo de la figura 2, los participantes introducen en su narración la explicación del concepto de unidad.

Tabla 1. Conceptos y procedimientos añadidos

	Ejemplo	Porcentaje N=82
Concepto de numerador y denominador	“...en una fracción, el número o parte que cogemos del total se denomina numerador y el número en que dividimos el total y que se posiciona debajo es el denominador”	34%
Concepto de fracción entera	“...Como la cuerda la hemos dividido en 3 partes, la parte entera y completa sería $3/3$, ya que 3 dividido entre 3 es 1 que es la parte entera...”	17%
Concepto de unidad	“para la explicación de las fracciones, hemos cogido tres objetos: pizza, naranja y una cuerda. Estos objetos representan la unidad, es decir 1”	14%
Suma o resta de fracciones	“...cada trozo equivale a $1/3$ y tenemos 3 trozos, $1/3+1/3+1/3$ =cuerda completa...”; “nos comemos una porción $1/4$ al restarle $1/4$ a los $4/4$ nos quedan $3/4$ ”	10%

El conocimiento adicional más común consiste en identificar el significado del numerador y denominador con los elementos de la estructura conceptual en un proceso de división en partes de un objeto o en un proceso de reparto (34%).

Un segundo concepto que los maestros en formación añaden con frecuencia en sus respuestas (17%) es el concepto de fracción entera y su relación con el todo dividido en partes.

Otro concepto que los sujetos introducen es el de unidad y su identificación con el todo u objeto inicial (14%).

Por último, en algunas respuestas se introducen sumas y restas de fracciones, aunque en ningún caso se explica el procedimiento para resolver estas operaciones.

Datos sobre fenomenología

A pesar de que las ilustraciones inducen un proceso de división en partes, en sus respuestas los sujetos introducen otros sentidos distintos: repartir, medir y reconstruir la unidad dada una fracción.

Tabla 2. Sentidos presentes en las respuestas

	Porcentajes N=82
(1) Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la selección de algunas de ellas.	37%
(2) Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto y la medida de una de las partes	20%
(3) Las fracciones surgen de una división en partes de un objeto	20%
(4) Las fracciones surgen de un proceso de división y reparto	10%
(5) Las partes se recomponen dando lugar a la unidad	7%
(6) Las fracciones surgen de un reparto	6%

Estos sentidos se presentan en las respuestas de manera única o combinando los sentidos de división con medida o reparto. Ejemplificamos a continuación algunos de estos sentidos.

(4) “la pizza está entera....como estamos 4 amigos la repartiremos entre todos, un trozo para cada uno. Como somos buenos amigos, los trozos serán iguales para todos....Si la pizza la partimos en 4....la unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos...”.

(5) “Los fragmentos se corresponden a 1 pizza dividida en 4 trozos. Se llega a representar de la siguiente forma: al sumar las 4 porciones se representa de la siguiente forma $4/4$. Con lo cual se obtendría la siguiente forma: [imagen del todo]”

Datos sobre representaciones

Puesto que la tarea propuesta a los sujetos contiene ilustraciones con elementos gráficos y numéricos, solamente en 5 casos se incluyen representaciones gráficas o simbólicas (a/b) distintas de las dadas en las ilustraciones.

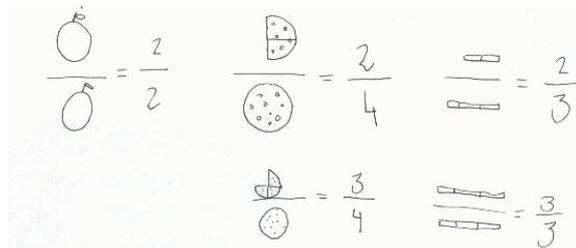


Figura 3. Ejemplo de representación gráfica presente en una respuesta

Estas nuevas representaciones, surgen para plantear nuevos ejemplos (figura 3), o reforzar la explicación de los ya presentes en las ilustraciones propuestas.

OTROS HALLAZGOS

Durante la realización del análisis de las respuestas, notamos que los participantes, además de seleccionar aquellas componentes del concepto que conocen y/o elegir los que les parecen más adecuados, utilizan diferentes modos de presentar los contenidos. Hemos agrupado estos datos en tres categorías: instrumental, narrativo y funcional. Las diferencias entre ellos no implican, en ningún caso, al contenido.

En el enfoque instrumental la narración no incluye situaciones ni problemas contextualizados que puedan ayudar a la comprensión de los contenidos. Este modo de abordar el contenido es predominante en las respuestas (73%). Un ejemplo de respuesta para este estilo es la siguiente.

(Tarjeta A1) Le explicamos que la pizza, la cuerda y la naranja son cada una unidad.

(Tarjeta A2) Le explicamos que esas unidades las podemos dividir en partes iguales. La naranja la partimos por la mitad, la cuerda en 3 partes y la pizza en cuatro.

(Tarjeta A3) Le explicamos lo que es cada parte. El trozo de cuerda sería $1/3$ de toda la cuerda que hemos dividido en 3 partes. Un trozo de pizza sería $1/4$ porque cogemos una parte de los 4 que habíamos partido. La naranja es $1/2$ de toda la naranja porque nos quedamos con una parte de las dos de las que habíamos partido.

En el enfoque funcional, se aborda el contenido a través de situaciones contextualizadas y presentando demandas cognitivas al escolar, la mayor parte de las veces a través de la resolución de problemas. Este enfoque tiene una presencia escasa en las respuestas (13%). En la siguiente respuesta podemos verlo reflejado.

(Tarjeta A1) Una familia de 4 personas, quiere repartirse una pizza pero no sabe cómo.

(Tarjeta A2) Como son 4 personas, dividen en 4 partes quedando así $1/4$, $1/4$, $1/4$, $1/4$., todo sumando da $4/4$.

(Tarjeta A3) Cada uno pues, se come $\frac{1}{4}$ de pizza. El hijo se ha comido ya $\frac{1}{4}$ de pizza así que quedan $\frac{3}{4}$ de pizza.

En el enfoque narrativo, al igual que en el caso anterior, se introducen los contenidos a través de una narración que modeliza una situación real pero no se incluye ninguna demanda cognitiva. Tiene una presencia similar al caso anterior (14%). Una respuesta que se corresponde con este estilo es la siguiente.

Hoy vamos a aprender lo que es una fracción, nos basamos en un ejemplo sencillo para ello.

(Tarjeta A1) Como vemos en la figura 1 la pizza está entera, si queremos comerla deberíamos de partirla. Como estamos 4 amigos deberíamos de partirla, un trozo para cada uno.

(Tarjeta A2) Como somos buenos amigos los trozos serán iguales para todos. Partiremos nuestra pizza y nos quedará como en la figura 2. Si tuviéramos que decir a cuánto nos a tocado cada uno y cuánto al resto ¿como lo haremos?

(Tarjeta A3) ¡Exacto! Con fracciones. Si la pizza la partimos en 4 trozos y nos quedamos con un trozo lo que les toca a los demás es $\frac{3}{4}$ como aparece en la figura 3. Una fracción es una parte de la unidad. La unidad es la pizza, las porciones las partes en las que dividimos, y lo que nos corresponde (nuestra porción) es una fracción.

Al cruzar esta categoría para el análisis de la explicación con la categoría fenomenología para el contenido, se observó que en los modos narrativo y funcional, la mayoría de los participantes utilizaron el sentido de reparto, mientras que en el enfoque instrumental lo hicieron mediante el sentido de división.

CONCLUSIONES

El objetivo de este estudio fue caracterizar el conocimiento didáctico del contenido, desde la perspectiva del análisis de contenido, que presenta un grupo de maestros de primaria en formación cuando abordan una explicación para introducir el concepto de fracción. Los resultados muestran que hemos obtenido información sobre el conocimiento didáctico del contenido, categorizada en cada una de las componentes del análisis de contenido. De toda esta información, destacamos que gran parte de los participantes incluyen la noción de numerador y denominador cuando introducen a sus escolares en las fracciones, mientras que sólo un 14% de ellos abarcan la noción de unidad y un 10% consideran importante incluir aspectos procedimentales al finalizar sus respuestas con la suma y resta de fracciones. Casi la totalidad de los participantes no consideran necesario añadir otras representaciones distintas de las ilustraciones gráficas dadas en la tarea, pizza, cuerda y naranja.

Consideramos que un logro de este estudio es que, a través de un instrumento aparentemente sencillo, nos hemos aproximado a este tipo de conocimiento salvando las dificultades de otros estudios (Charalambous, Hill y Ball, 2011; Li y Kulm, 2008), en los que las carencias en el conocimiento del contenido sobre fracciones incidió en sus resultados.

A pesar de que otros estudios utilizan ítems similares “¿Cómo explicarías las fracciones a alguien que no sabe lo que son?” (Domoney, 2001), en esos estudios la información adquirida no estuvo a la altura de las expectativas esperadas, ya que las respuestas fueron simples y escuetas debido al modo de plantear los ítems a los participantes. Nuestro modo de formular la actividad y el uso de ilustraciones a través de pegatinas, dio lugar a una mayor riqueza de respuestas y resultados. Además, el contexto de la asignatura hizo que la dinámica de trabajo estuviese orientada hacia la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I

(MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En Biehler, R., Scholz, R., Sträber, R. y Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech: Kluwer.
- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. A. y Flores, P. (2012) Mathematics teacher's specialized knowledge. reflections based on specific descriptors of knowledge. In B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2976-2984). Ankara, Turkia: Cerme.
- Charalambous, C.Y., Hill, H. C. y Ball, D. L. (2011). Prospective teachers' learning to provide instructional explanations: How does it look and what might it take? *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14, 441-463.
- Domoney, B. (2001). Student teachers' understanding of rational numbers. En J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, Vol. 21, núm. 3 (pp. 13-18). Southampton: BSRLM
- Fuller, R. A. (1996, Octubre). Elementary Teachers' Pedagogical Content Knowledge of Mathematics. Documento presentado en Mid-Western Educational Research Asociation Conference, Chicago, Illinois.
- Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Huesca, España: Instituto de Estudios Aragoneses.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press
- Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan.
- Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371- 406.
- Isiksal, M. y Cakiroglu, E. (2011) The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(3), 213-230.
- Li, Y. y Kulm, G. (2008) Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction división. *ZDM*, 40, 833-843.
- Lupiañez, J.L. (2009) Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.
- Ponte, J. P. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da Educação*, 11(2), 145- 163.
- Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 1-22). Granada, España: Comares, S.L.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Valverde, G. (2012). competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.