COMPETENCIAS DE LOS ESTUDIANTES EN RAZÓN Y PROPORCIÓN: EL CASO DE LAS TAREAS DE RELATIVIZAR[1]

Students' competences in ratio and proportion: the case of relatively tasks

Bernardo Gómez Alfonso, Amparo García Nadal

Universidad de Valencia

Resumen

En este trabajo se estudia la resolución de tareas de razón y proporción referentes a ofertas comerciales. Se identifican las componentes críticas de las tareas y se analizan las respuestas de los estudiantes de distintos niveles al resolverlas. Finalmente se extraen conclusiones acerca de su desempeño.

Palabras clave: *razón y proporción, relativamente, normalizar*

Abstract

In this work, the resolution of ratio and proportion tasks concerning commercial offers are studied. The critical components are identifying and student's responses to each task are analyzed. Finally, concluding remarks are extracted.

Keywords: *ratio and proportion, relatively, norming*

INTRODUCCIÓN

Razón y proporción es muy importante en el currículum obligatorio por su gran aplicación práctica en situaciones de la vida cotidiana, i.e., las ofertas comerciales, velocidades, densidades, escalas, etc. A pesar de su importancia, es un tema cuya enseñanza no está bien resuelta. Como señala la investigación precedente, los estudiantes muestran dificultades para aprender y manejar estos conceptos, y los profesores para enseñarlos.

En didáctica de las matemáticas, razón y proporción se ha estudiado desde diferentes puntos de vista a lo largo de los últimos años. Uno de ellos es el estudio de competencias en la educación primaria tal y como se puede ver en Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009). Las aportaciones de estos textos son los antecedentes de este trabajo y también lo es el análisis fenomenológico del concepto de razón y proporción que elabora Freudenthal (2001) ya que de aquí se extrae el concepto base sobre el cual se desarrolla este estudio, es lo que él denomina “relatively”. El eje central de este trabajo es pues el concepto de relativizar ya que, al revisar la literatura, se comprueba que hay pocos textos que lo estudian, en particular, uno de los que se ha encontrado y en el cual se desarrolla esta idea es Fernández (2009), aplicado a problemas de densidades.

MARCO TEÓRICO

La problemática que existe entorno al razonamiento proporcional y la proporcionalidad es muy compleja y se ha estado estudiando desde hace varias décadas. Entre los estudios centrados en este tema, se distinguen dos tipos:

1. Los que se centran en el desarrollo cognitivo.
2. Los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático.

Gómez, B., y García, A. (2014). Competencias de los estudiantes en razón y proporción: El caso de las tareas de relativizar. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compaña, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 83-91). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Según Tourniaire y Pulos (1985), los del primer tipo han cambiado desde una perspectiva del razonamiento proporcional como una habilidad global o una manifestación de una estructura cognitiva, hacia otra perspectiva que focaliza su atención en la descripción de procedimientos usados en el mismo y cómo influyen las variables personales y de tarea. La idea principal en la cual se centran es en lo que el alumno puede o no puede hacer. Para evaluar esto, se han utilizado distintos tipos de tareas: *Valor perdido, Comparación, Transformación, Valor medio, Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones, Proporciones que involucran tanto clasificaciones de ciertas unidades como de números, y tareas de Traslación "entre-modo"* (Lesh, Post y Behr, 1988). El análisis de las respuestas a este tipo de tareas ha permitido identificar estrategias correctas: *Razón unitaria, Factor de cambio, Método de la fracción* y *Producto cruzado*; y estrategias incorrectas: *Construcción progresiva, Diferencia constante* y *Operaciones aleatorias* (Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993; Hart, 1981).

Los estudios centrados en el contenido matemático, apuntan a que dos de los conceptos que resultan esenciales en razón y proporción: *relativizar* y *normalizar*, y sus técnicas, han sido poco estudiados, mención aparte del trabajo de Fernández (2009) aplicado a problemas de densidades.

Relativizar, es "poner en relación con…". Esto permite comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente. Un ejemplo representativo es: "una pulga puede saltar -relativamente- más alto que un hombre" (Freudenthal, 2001).

El segundo concepto, "normalizar", se refiere al conjunto de técnicas mediante las cuales se pueden percibir razones que a priori resultan difíciles de imaginar. Un ejemplo es: "si imaginamos la Tierra como la cabeza de un alfiler (1 mm de diámetro), el Sol aparece como una esfera con un diámetro de 10 cm a una distancia de 10 m".

Freudenthal, además, define una secuencia de niveles para su enseñanza, que es útil para caracterizar las respuestas de los participantes en este estudio.

Esto va a suponer una herramienta para caracterizar las respuestas de los participantes en este trabajo. Además, la enseñanza de esta secuencia de niveles puede ser útil para resolver problemas de razón y proporción.

OBJETO DE ESTUDIO Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

El propósito de este trabajo es aportar información fundamentada en relación con tareas de "relativizar" y normalizar, aunque aquí solo documentamos algunos resultados en relación con el primer concepto. A tal fin, las preguntas de investigación que se han formulado son:

- ¿Cómo responden a estas tareas: cuantitativa o cualitativamente?
- ¿Qué estrategias utilizan: aditivas, multiplicativas, etc.?
- ¿En qué aspectos se fijan: datos, imágenes, texto, etc.?
- ¿Qué dificultades manifiestan: comprensión, conceptos, procedimientos, etc.?

METODOLOGÍA

El referente de la metodología en nuestro estudio son los trabajos previos de nuestro grupo, Fernández (2009) y Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009). Se trata de una investigación de tipo cualitativo que se basa en el "análisis de las tareas" a partir de un cuestionario diseñado *ex profeso*. Las tareas propuestas para el cuestionario son realistas, más concretamente, tomadas de folletos de ofertas comerciales de diversos establecimientos.

Estas tareas se clasifican, según su tipología, como tareas de comparación cuantitativa ya que se trata de razonar cuándo una razón es mayor, igual o menor que otra [A/B (<, =, >) C/D]. Esto se puede hacer o bien de modo grosero, o bien de forma precisa.

La muestra tomada para el estudio corresponde a tres niveles educativos diferentes. En primer lugar, se facilitó el cuestionario a alumnos de primer curso de bachillerato del instituto Jaume II el Just de Tavernes de la Valldigna, a un grupo de ciencias sociales (grupo A, 18 alumnos) y a otro de ciencias (grupo B, 25 alumnos). En segundo lugar, se realizó la prueba con estudiantes de segundo curso de grado de magisterio (48 alumnos) y del máster de profesorado (38 alumnos) de la Universidad de Valencia (UV).

Las actividades del cuestionario se distribuyeron en hojas de trabajo individuales y la actitud en los tres grupos fue interesada y participativa.

ANÁLISIS DE LAS TAREAS

Para poder ilustrar el tipo de análisis que se realizó con cada una de las tareas y para dar cuenta de las preguntas de investigación, se muestra a continuación como ejemplo el análisis de la tarea denominada “pizzas”. Primero se caracteriza esta tarea, se definen sus objetivos y se relaciona con el marco conceptual previo, después se determinan sus componentes críticas, se discuten las soluciones aportadas por expertos y, finalmente, se aporta un esquema de clasificación de las respuestas de los estudiantes por categorías y subcategorías.

Tarea “Pizzas”

La tarea se presenta a los participantes mediante una hoja individual de trabajo en la que aparece una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14.95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm diámetro y 27.95€? (Figura 1).

Figura 1. Tarea Pizzas

Se trata de una tarea de comparación de comparaciones internas (áreas entre sí y costes entre sí) o externas (valores unitarios).

Atendiendo al marco conceptual, la tarea es de comparación en el sentido de Lesh, Post y Behr (1988) [A/B(=?=)C/D], aunque no se precisa respuesta numérica precisa, puede ser grosera (Freudenthal, 2001). La relación numérica puede ser interna o externa (Freudenthal, 2001). Por último, el contexto se corresponde con el de ofertas comerciales de establecimientos.

El objetivo principal de esta tarea es comprobar si los estudiantes son capaces de percibir la relación de relaciones que da respuesta a la tarea. Esto, ya se ha visto que se puede hacer calculando el precio en relación a la cantidad, es decir, el coste unitario, o su relación inversa.

Notar que una de las respuestas esperadas es la que se refiere a qué oferta ofrece más cantidad de comida con el menor precio, no de forma absoluta sino relativa. Para ello es necesario:

1. Calcular:
    a. El área de las pizzas medianas y el de la familiar.

b. El coste de las pizzas medianas.
c. Los costes unitarios de cada oferta.

2. Comparar:
   a. Área (¿dónde hay más?)
   b. Precio (¿cuál es más barata?)
   c. Comparar comparaciones cualitativamente: “a más, menos o igual de esto le corresponde más, menos, igual de esto otro”.

Soluciones aportadas por los expertos

Con el objetivo de conocer a priori diversas estrategias de resolución de la tarea y tener información de los procesos de resolución, se facilitó el cuestionario a 4 expertos. Se considera experto a todo profesor experimentado y/o con sólida formación matemática. Las soluciones aportadas por los expertos se consideran soluciones esperadas al resolver una tarea.

Se presenta a continuación un ejemplo representativo (Figura 2) correspondiente a una experta, la cual muestra los dos tipos de resoluciones diferentes identificadas en sus actuaciones.

Suponiendo que todas las pizzas están elaborados igual (mismo ingredientes y mismo masa), y que "mejor" significa pagar menos por lo mismo, razono con el precio por cm^2. Pizza mediana (ϕ30cm) área = $\pi 15^2$ cm^2 = 225 π cm^2 Precio/cm^2 = $\frac{14'95}{225\pi}$ = 0'0211 €/cm^2 Pizza grande (ϕ50cm) área = $\pi 25^2$ cm^2 = 625π cm^2 Precio/cm^2 = $\frac{27'95}{625\pi}$ = 0'014 €/cm^2 Comprando la misma cantidad de pizza, la grande es más económica. Además, 2 pizzas medianas tienen una superficie menor (450π cm^2) que una grande y, sin embargo, es más cara (29'9€ frente a 27'95€).	Suponiendo que todas las pizzas están elaboradas igual (mismos ingredientes y misma masa), y que "mejor" significa pagar menos por lo mismo, razono con el precio por cm^2. Pizza mediana (ϕ 30 cm) — Pizza grande (ϕ 50 cm) área = $\pi\cdot15^2 = 225\cdot\pi$ cm^2 — área = $\pi\cdot25^2 = 625\cdot\pi$ cm^2 Precio/cm^2 = 14.95/225·π = — Precio/cm^2 = 14.95/225·π = = 0.0211€/ cm^2 — = 0.014€/ cm^2 Comprando la misma cantidad de pizza, la grande es más económica. Además, 2 pizzas medianas tienen una superficie menor (450·π cm^2) que una grande y, sin embargo, el más cara (29.9€ frente a 27.95€).

Figura 2. Experta

La experta calcula el área de una pizza mediana ($S_m = \pi\cdot15^2 = 225\cdot\pi$ cm^2) y el área de la pizza familiar ($S_f = \pi\cdot25^2 = 625\cdot\pi$ cm^2) ya que el precio de cada unidad viene dado como dato. Luego calcula los valores unitarios (P_m/S_m = 0.0211€/cm^2 y P_f/S_f = 0.014€/cm^2) en cada caso y los compara. Finalmente apoya su conclusión con que “*2 pizzas medianas tienen una superficie menor (450·π cm^2) que una grande y, sin embargo, el más cara (29.9€ frente a 27.95€)*”.

En la resolución de esta profesora se identifica la percepción de la invariancia de la razón ya que para calcular el coste unitario solamente utiliza los datos de una pizza mediana y no los de las dos medianas en total.

Los expertos han mostrado dos tipos de respuestas: una que se basa en el cálculo del coste unitario de las pizzas y otra que se centra en la idea de qué oferta proporciona más cantidad a menor precio.

Esquema de clasificación

Con el fin de dar cuenta de las respuestas aportadas por los estudiantes se organizan en un esquema de categorías y subcategorías atendiendo a los rasgos comunes y no comunes identificados. Se acompaña cada una de ellas con un ejemplo extraído de las respuestas proporcionadas por los alumnos.

Categoría 1: Relativiza

En esta categoría se incluyen respuestas que se centran en razonamiento relativo, no absoluto.

Subcategoría 1.1. Compara razones adecuadas - Normaliza (Figura 3)

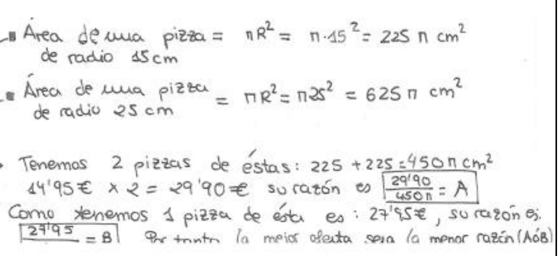	Área de una pizza de radio 15cm = $\pi\cdot R^2 = \pi\cdot 15^2 = 225\cdot\pi$ cm^2 Área de una pizza de radio 25cm = $\pi\cdot R^2 = \pi\cdot 25^2 = 625\cdot\pi$ cm^2 Tenemos 2 pizzas de éstas: 225+225=450·π cm^2 14.95€ x 2 = 29.90€ su razón es A = 29.90/450·π Como tenemos 1 pizza de ésta es: 27.95€, su razón es B = 27.95/625·π Por tanto la mejor oferta será la menor razón (A ó B).

Figura 3. Alumno 14 (máster)

El alumno calcula el área de la pizza familiar ($S_f = \pi\cdot 25^2 = 625\cdot\pi\ cm^2$) y el área y coste de las pizzas medianas ($S_m = \pi\cdot 15^2 = 225\cdot\pi\ cm^2 \rightarrow 225\cdot\pi + 225\cdot\pi = 450\cdot\pi\ cm^2$; 14.95€ ·2 = 29.90€). A continuación calcula los costes unitarios (A = 29.90/450·π; B = 27.95/625·π) y concluye que "*la mejor oferta será la menor razón (A ó B)*".

Esta estrategia es adecuada y se basa en el cálculo de los valores unitarios, que ha sido identificada como estrategia correcta.

Subcategoría 1.2. No compara razones adecuadas - Linealidad (Figura 4).

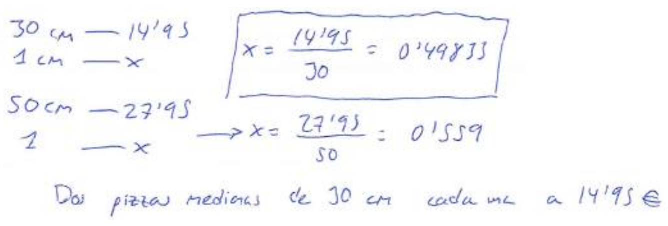	30 cm → 14.95 x = 14.95/30 = 0.49833 1 cm → x 50 cm → 27. x = 27.95/50 = 0.559 1 cm → x Dos pizzas medianas de 30 cm cada una a 14.95€.

Figura 4. Alumno 7 (máster)

Este estudiante calcula el coste por centímetro de pizza mediante reglas de 3 (30cm → 14.95, 1cm → x; x = 14.95/30 = 0.49833 y 50cm → 27.95, 1cm → x; x = 27.95/50 = 0.559) y concluye que es mejor "*dos pizzas medianas de 30cm cada una a 14.95€*".

Si el alumno hubiese usado esta estrategia pero en lugar de considerar cm hubiese considerado cm^2, entonces sería correcto. La dificultad observada es lo que se conoce como "linealidad" (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006).

Subcategoría 1.3.a. Compara razones cualitativamente de forma adecuada (Figura 5)

En esta respuesta, el alumno calcula el área totas de ambas ofertas ($S_f = 1963.49cm^2$; $S_m = 706.85cm^2$, $2\cdot S_m = 1413cm^2$) y el coste de las dos pizzas medianas (29.90€). Concluye que "*es mucho más económico la pizza de 50cm de diámetro*".

Se observa en los datos, sin tener que realizar cálculo de razones explícitas que la familiar ofrece más área a menor precio.

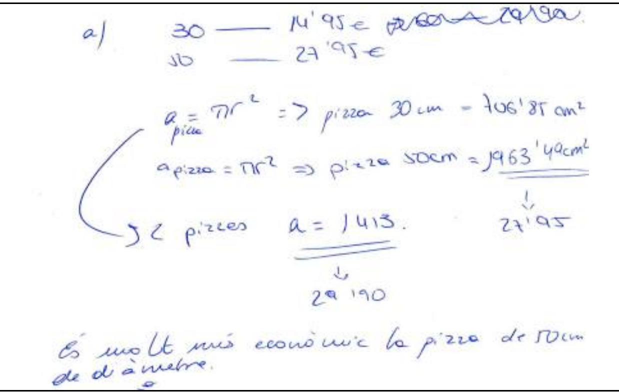	30 → 14.95€ 50 → 27.95€ $a_{pizza} = \pi \cdot r^2$ → pizza 30 cm = 706.85 cm^2 $a_{pizza} = \pi \cdot r^2$ → pizza 50 cm = 1963.49 cm^2 2 pizzes a = 1413 ↓ ↓ 27.95 29.90 Es más económica la pizza de 50 cm de diámetro.

Figura 5. Alumno A1 (bachillerato)

Esta estrategia ofrece una solución correcta a la tarea.

Subcategoría 1.3.b. Compara razones cualitativamente de forma no adecuada (Figura 6)

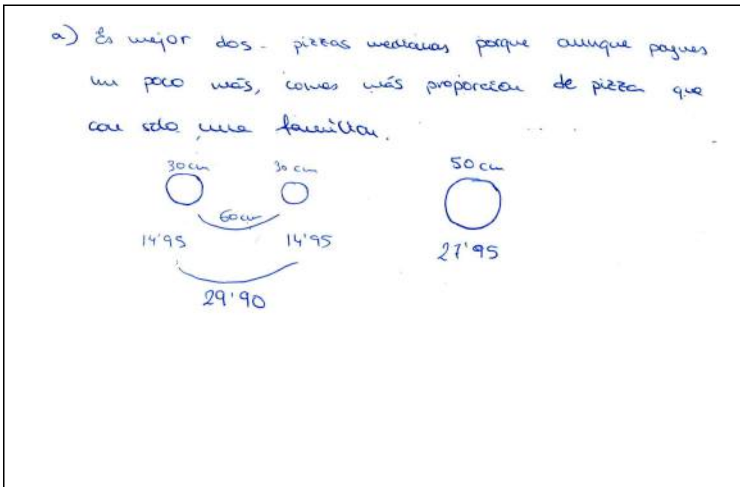	Es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más porción de pizza que con solo una familiar. 30 cm 30 cm 50 cm ↓ ↓ 60 cm 27.95 14.95 14.95 ↓ 29.90

Figura 6. Alumno A3 (bachillerato)

Este estudiante procede igual que el de la figura 5, pero la diferencia es que este no considera áreas sino diámetros (Familiar: 27.95€ y 50cm; Medianas: 29.90€ y 60cm). Concluye que “es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más proporción de pizza que con solo una familiar”.

Esta estrategia no es correcta ya que le ocurre algo similar al de la figura 4 (“linealidad”) y, si se calcula el área de una pizza de 60cm de diámetro, es mucho mayor que el área de dos pizzas medianas de 30cm de diámetro cada una. Si solamente se considerase un ítem en cada oferta, razonar mediante el diámetro sería correcto ya que a mayor diámetro mayor área, pero al considerar dos ítems de pizzas medianas, esto no es suficiente.

Lo que tienen en común ambas respuestas es que muestran pensamiento relativo pero sin calcular explícitamente las razones. El tipo de razonamiento es “a más, menos o igual de esto, le corresponde más, menos o igual de esto otro”.

Categoría 2: No relativiza

A diferencia de la categoría anterior, las respuestas que se muestran aquí se centran en cálculos con datos absolutos, no relativos.

Subcategoría 2.1. Cualitativa (Figura 7)

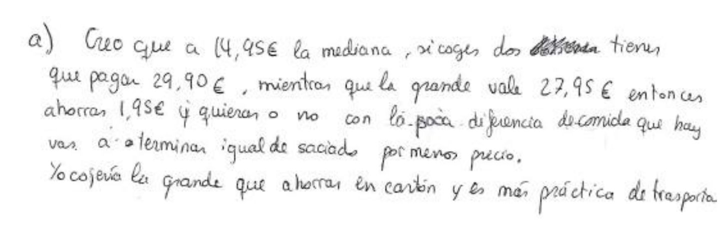	Creo que a 14.95€ la mediana, si coges dos tienes que pagar 29.90€, mientras que la grande vale 27.95€ entonces ahorras 1.95€ y quieras o no con la poca diferencia de comida que hay vas a terminar igual de saciado por menos precio. Yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar.

Figura 7. Alumno B37 (bachillerato)

Aunque este alumno empieza a razonar con cálculos aditivos, su conclusión se basa en razonamiento cualitativo ya que expresa que "*yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar*".

Está claro que la estrategia no es adecuada ya que no se centra en datos numéricos de la oferta.

Subcategoría 2.2. Cuantitativa

En esta subcategoría se distinguen dos clases:

Clase 2.2.1. Extensión de la razón y comparación aditiva (Figura 8)

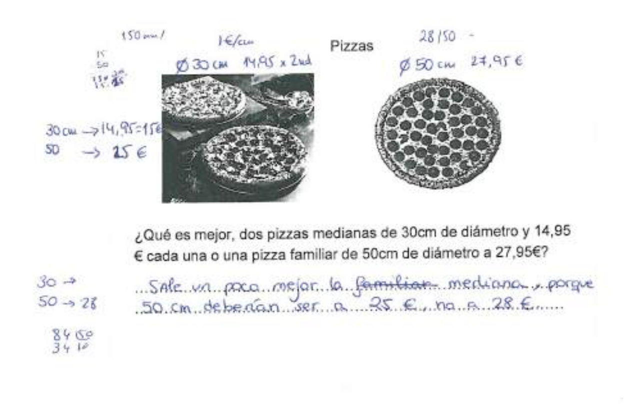	ϕ 30 cm 14.95 x 2 ud ϕ 50 cm 27.95 30 cm → 14.95 = 15€ 50 cm → 25€ 30 → 50 cm → 25€ Sale un poco mejor la mediana, porque 50 cm deberían ser a 25€, no a 28€.

Figura 8. Alumno 3 (máster)

Este estudiante calcula el precio del diámetro de la familiar fijando los datos de una pizza mediana (30cm → 15€, 50cm → x; x = 25€) y concluye que "*sale un poco mejor la mediana porque 50cm deberían ser a 25€ y no a 28€*".

Al igual que ocurre en la respuesta del alumno de la figura 6, si se calculase respecto de áreas y no de diámetros, esta estrategia sería correcta. El alumno intenta extender la razón entre el diámetro y el precio de una pizza mediana a los datos de la familiar. Sin embargo, el uso de la "linealidad" le lleva a responder incorrectamente a la tarea. Incluimos este tipo de respuestas en esta categoría porque las cantidades que finalmente compara el alumno son absolutas

Clase 2.2.2. Tentativas (Figura 9)

En esta respuesta se observa que el alumno realiza cálculos aditivos ya que dice que "*si compras una pizza familiar el precio sería de 27.95€, pero tendrías 10cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1.95€. Yo creo que es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1.95€ tienes 10 cm más de comida*".

Está claro que la estrategia no es adecuada porque está comparando datos absolutos, no relativos. Además, concluir que a más de esto más de esto otro no es suficiente, se debe apoyar con cálculos que lo justifiquen debidamente.

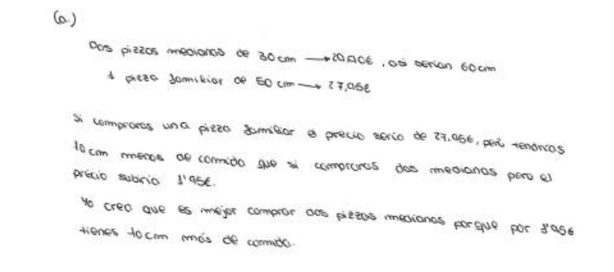	Dos pizzas medianas de 30 cm → 29.90€, así serían 60 cm 1 pizza familiar de 50 cm → 27.95€ Si compraras una pizza familiar el precio seria de 27.95€, pero tendrías 10 cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1.95€. Yo creo que es mejor dos pizzas medianas porque por 1.95€ tienes 10 cm más de comida.

Figura 9. Alumno B40 (bachillerato)

Categoría 3: No identificados

En esta categoría se recogen respuestas en blanco, no justificadas o que no se entienden, bien sea por la letra o porque se realizan cálculos aleatorios.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación se muestra una tabla resumen en la que se distribuyen las diferentes respuestas de los estudiantes en las categorías y subcategorías definidas. Notar que esta tarea solamente se hizo en los grupos de bachillerato y en el del máster.

Tabla 1. Resumen de datos por categorías y subcategorías

Categoría	1. Relativiza				2. No relativiza			3	Total
Subcategoría	*1.1*	*1.2*	*1.3*		*2.1*	*2.2*		-	-
Clase	-	-	*1.3.a*	*1.3.b*	-	*2.2.1*	*2.2.2*	-	-
Grupo A	0	2	1	2	0	1	8	4	18
Grupo B	3	4	0	1	3	1	12	1	25
Máster	14	3	9	0	1	4	2	3	36
Total	17	9	10	3	4	6	22	8	79

En la tabla 1 se observa que los estudiantes del máster utilizan pensamiento relativo (26/36) más que absoluto (7/36). Esto era de esperar dada la formación y madurez de los estudiantes del máster, ahora bien, la mayoría de los que relativizan lo hacen con la estrategia escolar del valor unitario (14/36) y algunos utilizan una estrategia de comparación cualitativa (9/36) que también da respuesta a la tarea. Notar que a pesar de tener una formación amplia en matemáticas, todavía hay alumnos que recurren a estrategias aditivas (2/36) y al uso de la linealidad en el cálculo del valor unitario (3/36). En cambio, en los alumnos de bachillerato ocurre lo contrario (Relativo: 13/43; Absoluto: 25/43). Se identifica una tendencia a responder aditivamente (25/43) mientras que muy pocos alumnos que siguen la estrategia del valor unitario que mostraron los expertos (3/43).

Por lo que se refiere a la subcategoría 1.3, se observa que 9/36 estudiantes del máster usan el tipo de razonamiento "a más, menos o igual de esto le corresponde más, menos o igual de esto otro", es decir, que comparan razones cualitativamente y además de forma adecuada. Este tipo de respuesta también se identificó entre las aportaciones de los expertos. Notar que esta respuesta es menos escolar o producto de la enseñanza que la del cálculo del valor unitario. Sin embargo, ocurre lo contrario con los de bachillerato. Solamente 1/43 alumnos utiliza esta estrategia mientras que 3/43 la usan linealmente, por lo que éstos no la resuelven adecuadamente.

Por último, destacar que de los que realizan extensión de la razón (2.2.1), entre los de bachillerato, 1/43 lo hace linealmente mientras que 1/43 lo hace respecto del área aunque se equivoca en los cálculos. En el máster, 1/36 lo hace respecto del diámetro y 3/36 respecto del área pero estos 3 muestran dificultades al realizar los cálculos y ninguno llega a dar una solución correcta a la tarea.

Respecto a las conclusiones del estudio, se distinguen las siguientes:

- hay dificultades en la interpretación de comparaciones del tipo unidades por euro más que en la relación inversa y también para recordar el área de un círculo,
- la palabra "mejor" genera, en diversas ocasiones, valoraciones subjetivas,
- la mayoría de los estudiantes no perciben la invariancia de la razón y eso se identifica cuando buscan el valor unitario en la tarea pizzas y calculan el área total y el costes de las dos medianas para obtener dicha razón,
- hay una tendencia al cálculo del valor unitario según avanza el nivel educativo,
- el uso de la "linealidad" persiste en todos los niveles, de hecho, la mayoría de los estudiantes intentan usar los diámetros en lugar de calcular áreas y,
- algunos alumnos expresan verbalmente la idea de "relatively" pero no lo manifiestan numéricamente, por lo que no alcanzan el último nivel definido por Freudenthal.

Referencias

Cramer, K., & Post, T. (1993). Proportional Reasoning. *The Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria.* Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados, Traducción Luis Puig). México, D. F. Dpto de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Hart, K.M. (1981). Ratio and Proportion. In K. M. Hart (Ed.), *Children´s Understandings of Mathematics: 11-16* (pp. 88-101). London: John Murray Ltd.

Lamon, S.J. (1993). Ratio and Proportion: Children's cognitive and metacognitive processes. In T. Carpenter, E. Fennema and T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp.131-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: a Review of the Literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía IV*, 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics, 53*, 113-118).

---

[1] Esta aportación se sustenta en un proyecto de investigación financiado por el MEC. Ref.: EDU2009-10599 (subprograma EDUC).