

## ACERCAMIENTOS A LA ALEATORIEDAD EN LA ENSEÑANZA OBLIGATORIA

Teresita Méndez Olave y Leonora Díaz Moreno  
 Universidad de Los Lagos  
 tmendez@ucm.cl, leonora.diaz@ulagos.cl

Chile

**Resumen.** Exploramos el pensamiento aleatorio de niños, aplicando a cuatro estudiantes 6 situaciones en formato visual, para validar la pregunta ¿Qué conocimiento de aleatoriedad surgen desde las historias de futuro que estudiantes, entre 10 a 12 años construyen? La metodología es estudio de casos y se analizan textualidades, considerando al conocimiento y pensamiento matemático como construcciones culturales desarrolladas a través de la acción individual y compartida (Candela, 1999, p 276; Díaz / Castro 2011); y a las nociones de aleatoriedad surgidas desde sus conocimientos informales. Concluimos que los niños identifican implícitamente variables que pueden influir en el resultado incierto de cada situación.

**Palabras clave:** historias de futuro, suceso aleatorio, suceso determinista

**Abstract.** We explore the random thoughts of children, applying to four students six situations in visual format, to validate the question: What knowledge of randomness arise from the student's stories of future, between 10 to 12 years built? The methodology is a case study and textualities analyzed, considering the knowledge and mathematical thinking as cultural constructions developed through individual and shared action (Candela, 1999, p 276; Diaz / Castro, 2011); and notions of randomness arising from their informal knowledge. We conclude that children implicitly identify variables that could influence the uncertain outcome of every situation.

**Key words:** future stories, randomness event, determinist event

### Problemática

Los actuales currículos de matemática escolar coinciden, desde hace algún tiempo, en introducir el concepto de aleatoriedad y la noción de probabilidad como uno de los tipos de pensamiento matemático a desarrollar en la educación obligatoria, adoptando modelos didácticos que transitan desde la utilización, como recurso epistémico, del juego asociado a artefactos como las tómbolas, dados, monedas y ruletas hasta modelos de toma de decisiones. (Biehler y Pratt, 2012, p. 821) en los que los métodos numéricos y la determinación del espacio muestral se constituyen en obstáculos (Vásquez y Parraguez, 2011, p. 573 – 581), para el desarrollo de las difíciles situaciones escolares con las que se pretende relacionar la construcción del pensamiento probabilístico.

Durante los primeros niveles del ciclo básico, las actividades propuestas en los programas de estudio del currículo chileno, centradas en la recolección y organización de datos a través de situaciones de juego, que es un contexto aleatorio, no permiten caracterizar lo aleatorio de cada situación. En 4° básico (niños de 9 a 10 años) las actividades del programa sugieren argumentar sobre lo predecible o no de un evento, lo que tampoco es suficiente para reconocer su naturaleza aleatoria. En el final del ciclo, 6° básico, las actividades buscan cuantificar sucesos posibles y favorables utilizando el diagrama de árbol y asociar la probabilidad a la fracción entre casos favorables y posibles, pasando por la experimentación y la faceta frecuentativa de la probabilidad. Lo que deja en evidencia la invisibilidad de la noción aleatoriedad, en este currículo.

Los estándares orientadores, para futuros profesores de educación básica, señalan la importancia de considerar las particularidades de los escolares en la preparación e implementación de la enseñanza, entre las que se encuentran el desarrollo psicocognitivo, sociocultural, sus experiencias como el dominio de conocimientos, habilidades y competencias respecto a la disciplina. Este último aspecto, que es fundamental para un aprendizaje significativo, contrasta con la debilidad de los conocimientos disciplinarios y pedagógicos de los profesores, Ortiz y otros 2012 y López 2006, reportan la dificultad de los profesores al enfrentarse a conceptos nuevos para ellos, como los de probabilidad, citado por Ortiz (2006) y Stohl 2005 documenta que muchos profesores fallaban al implementar el enfoque experimental dado que las tareas propuestas consideraban muestras pequeñas en las que no se alcanzaba a apreciar la estabilización de la frecuencia.

Estos resultados evidencian una problemática en el triángulo didáctico, que relaciona las complejidades del saber a enseñar, la probabilidad; la débil preparación con la que enfrentan la enseñanza los profesores de educación básica, producto de una insuficiente o nula formación en el área y la importancia de una formación ciudadana que permita a las personas tomar las mejores decisiones bajo incertidumbre en los distintos ámbitos de su vida.

Favorecer una enseñanza que surja desde la modificación consciente de las ideas previas de los estudiantes y de las reorganizaciones que implica este cambio conceptual, comienza por indagar en los conocimientos sobre aleatoriedad que surgen desde las historias de futuro que elaboran 4 estudiantes frente a situaciones con ciertos niveles de incerteza. Conocer y describir tales relatos en estudiantes de 10 a 12 años proporciona información para comprender como razonan en escenarios de incerteza e identificar experiencias que faciliten la comprensión de esta noción y su reconocimiento en diferentes contextos. El problema de este estudio se formula en términos de la pregunta: ¿Qué conocimiento de aleatoriedad surgen desde las historias de futuro que estudiantes, entre 10 a 12 años construyen?

### Antecedentes

Una de las nociones centrales en la construcción de pensamiento probabilístico es el concepto de aleatoriedad. Quien comprende la distinta naturaleza de los fenómenos que conforman la realidad tiene grandes ventajas en los complejos procesos atribuidos al estudio de la probabilidad. Esta noción, como bien han señalado Azcárate y otros (1998, p 86), es ambigua, compleja y habitualmente es considerada como un concepto obvio sin que su significado sea analizado con profundidad. Ellos plantean la hipótesis de que determinados tipos de concepciones, pueden ser un claro obstáculo para la comprensión de la naturaleza probabilística de ciertos aspectos de la realidad. El concepto de suceso aleatorio, se presenta como un aspecto fundamental para contribuir al desarrollo de una cultura probabilística. La vida cotidiana está plagada de sucesos

aleatorios, entre ellos están: los accidentes, el número de personas que acudirán a un concierto, sacarse la lotería o los viajes. Este tipo de sucesos, aun cuando muchos de ellos dependan de decisiones individuales, pueden ser estudiados como aleatorios. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre y la complejidad presentes en los fenómenos; es decir, de la comprensión de la noción de azar (Azcárate, et al, 1998, p.86).

Por otra parte, los estudios de Piaget - Inhelder señalan que el concepto de aleatoriedad no puede ser acomodado antes de la etapa operacional. Otras preocupaciones sobre aspectos didácticos propuestos en los currículos escolares, que adoptan el enfoque de la probabilidad clásica, estimándose en términos de lo frecuentativo o subjetivo, son informados por Burril y Biehler 2011 y anteriormente Konold 2007, (citados por Biehler y Pratt 2012, p. 820) por lo que proponen a los investigadores, incursionar en el área del riesgo basado en decisiones.

Pratt, 2011, p.820; propone desarrollar mayor investigación que permita fundamentar planes de estudio que escapen a las limitaciones de los enfoques centrados en monedas, dados y ruletas ya que, Eicher y Vogel 2012 (citado por Biehler 2012, p. 821) sostiene que los estudiantes no podrían alcanzar, niveles importantes de cognición, debido a la simplicidad de la tarea las que pudieran ser un obstáculo para reconocer su naturaleza aleatoria.

El enfoque didáctico propuesto por Abrahamson, basado en el razonamiento perceptivo, proporciona una alternativa a la experimentación como recurso epistémico inicial que habrá que ir dejando de lado para dar paso a la conceptualización. Pfannkuch y otros enfatizan las imágenes, reconociendo el poder de las percepciones iniciales y el modelado para mejorar el razonamiento. Ellos promueven el uso de imágenes en un diseño de enseñanza que comienza con la comprensión de muestreo a los 14 años aproximadamente.

Estos resultados constatan el interés de identificar las experiencias que durante los primeros años de escolaridad podrían facilitar el aprendizaje de la probabilidad. En este reporte nuestro interés es explorar y analizar las concepciones sobre aleatoriedad que subyacen a las predicciones que, niños entre 10 y 12 años, formulan utilizando imágenes visuales.

### Marco teórico

Se consideran las contribuciones de Candela (1999, p 276) sobre la construcción contextual de significados que surge a partir del discurso, pudiendo producir múltiples versiones según la situación en la que se realiza. Concordamos con la concepción vygotskiana (1987, citado por Candela 1999, p 276) que atribuye un rol fundamental al lenguaje como medio social para modelar el pensamiento y al discurso y a la comunicación en la construcción de conocimiento científico. El

sostiene que los conceptos difieren según el contexto, y que en el caso de los cotidianos, entre los que se encuentran los de la cultura extraescolar, se adquieren por procesos inductivos, a partir de la percepción y dependen de historias individuales. De Azcarate y otros (1998, p 91) adoptamos la clasificación de tipos de argumentos explicativos, de la que destacamos el fenómeno de causalidad, asociado a explicaciones en función de factores causales o de ausencia de control y el fenómeno frecuencial, que se apoya en la lectura frecuencial que se realiza del fenómeno.

En el lenguaje cotidiano lo aleatorio está relacionado con lo casual, lo azaroso, lo aventurado, fortuito y la duda, entre otros sinónimos. En el discurso teórico el estudio de los fenómenos aleatorios se le atribuye a la probabilidad, y se caracterizan porque son fenómenos naturales cuyo resultado está fuera de control y dependen del azar. Así, en condiciones similares de realización, ellos pueden dar lugar a varios resultados, sin que pueda ser previsible enunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento o fenómeno. Para Ayer (1974) un fenómeno se considera aleatorio si se comporta de acuerdo al cálculo de probabilidades.

Desde esta perspectiva, nos apoyamos en Batanero (2005, p 252 - 256), ella distingue 3 concepciones que se han desarrollado en la evolución de esta noción:

Clásica: asocia la aleatoriedad con la equiprobabilidad; Frecuencial: asocia la con la convergencia entre las frecuencias esperadas y las observadas en experimentos aleatorios y Complejidad absoluta: Relaciona la aleatoriedad con la imposibilidad de establecer patrones en secuencias de experimentos aleatorios.

### Metodología

Participantes y Contexto: En esta exploración participan 4 niños cuyas edades fluctúan entre 10 y 12 años, de un colegio particular subvencionado de Curicó, quienes a partir de 2° básico se han estado aproximando al lenguaje y a las características de la noción de aleatoriedad, según el programa oficial. Los niños tienen cursado 4°, 5° y 6° año básico respectivamente. El estudio se sustenta en seis situaciones desarrolladas al mismo tiempo. Se utilizaron imágenes para que los niños elaboraran historias de futuro (predicciones), para caracterizar la aleatoriedad de la situación, pronunciarse sobre cuán posible era su historia, utilizando una escala de 1 a 9 en que 1 significa imposible que ocurra y 9 absolutamente posible, y justificarla. Las respuestas de los niños quedaron consignadas en papel.

Las preguntas están asociadas a conceptos básicos de la probabilidad, suceso, aleatoriedad y predicción, en el sentido de historias de futuro y son analizadas desde las textualidades de los estudiantes, en las que describen sus concepciones en las predicciones que elaboran.

Se esperaba que las respuestas provinieran desde la experiencia ante situaciones pasadas similares pero reconociendo cierto grado de incertidumbre en cada caso si correspondía. Dado que adherimos a la concepción de situación aleatoria como caracterizada por no poder afirmar con absoluta certeza lo que va a suceder, porque depende del azar, se espera que ante todas las situaciones, los niños construyan historias de futuro en torno a lo que visualiza y las fundamenten. Por razones de espacio solo se consideraran tres de las situaciones propuestas, para este artículo.



La primera situación refiere a esta imagen en la que debe predecir lo que sucederá en el instante siguiente, y justificarla.

Se espera que responda que: *El niño más grande le va a quitar la pelota al más chico; que este seguro de su predicción y la cuantifique como más que posible, lo que significaría que se fija en la posición de los jugadores e indique que es posible que esto ocurra porque el jugador más grande puede empujar al más pequeño, ya que lleva el brazo cerca de la espalda del más chico, y quitarle la pelota. Si no está seguro de su predicción lo cuantificará con muy poca posibilidad o poco posible, elaborando una justificando, lo que indica que considera implícitamente la presencia de distintas variables que no se pueden controlar.* La segunda situación, muestra dos imágenes de basquetbolistas anotando un punto con el balón, se espera que a la pregunta *¿Qué tiene de común estas jugadas?*, responda: *Que es un juego de basket y que en ambos casos el jugador anotará un punto y que este absolutamente seguro de la ocurrencia de esta predicción.* Lo que indica que reconoce que la situación tiene una única respuesta y significa que está completamente determinada. La tercera situación corresponde a un juego en que seis niños ubicados en círculo se tiran una pelota, sin un orden determinado, a la pregunta: *Si uno de tus amigos tiene la pelota ¿sabrías, en ese momento, si te la va a tirar a ti?*, se espera que responda *No*; que califique su respuesta con *muy posible*, y que Justifique: *Porque se la puede tirar a cualquier compañero porque el juego no tiene un orden.*

### Análisis de los resultados

En todas las situaciones los niños construyen historias de futuro cualificándolas de acuerdo a los criterios presentados. Las siguientes tablas muestran las textualidades y el análisis de ellas.

Situación 1	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
Escribe lo que crees que sucederá en el instante siguiente	El niño número 3 (derecha en la lámina) se va a caer.	Yo creo que sucederá que el jugador 3 (derecha) le meterá un gol al equipo contrario	En el instante puede pasar que anotara un gol o perdería, depende de la jugada que haga.	El niño n° 2 (del medio) pateara la pelota
¿Es seguro que esto ocurra?	Segura de su respuesta	Sí, yo creo que sucederá	Sí porque en la mayoría ocurre	Es posible
Coloca puntaje	6	Puede o no ser posible	8	6
Justifica	Porque el niño número 2 está empujando al niño 3	porque no se puede ver el futuro en lo que sucederá después	Yo puse ese puntaje porque lo que he visto en algunas veces sucede eso	Es posible porque el n°1 (de espalda en la foto) está más lejos y el n° 3 está a la misma distancia

Se observan dos tipos de historias, N1 y N4 construyen historias particulares y de suceso absoluto – lo que se percibe como no reconociendo la aleatoriedad – N2 y N3 construyen historias más generales las que refieren a identificar, en la situación, algunos elementos que pueden incidir en el resultado de la jugada, que no pueden controlar y que influyen en sus predicciones. Estas dos repuestas obedecen al reconocimiento implícito del azar en la situación.

Si se analizan los puntajes asociados a las historias construidas por los niños, 3 de 4 aceptan la aleatoriedad de la situación, sin embargo las justificaciones de N1 y N4 ponen en evidencia la concepción determinista de su pensamiento.

Tabla 1: producciones de los niños en la situación 1 y su análisis posterior

Situación 2	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
¿Qué tienen de común estas jugadas?	Los dos van a hacer una jugada (encestar)	Lo que tienen en común estos jugos es que los 2 van a encestar una jugada, también los 2 se tratan de basketball	Lo común es que los dos van a encestar en el aro de basquetbol	Ambos están cerca del aro y ambos aran un punto
¿Es seguro...?	Sí	Sí	Sí	Posible (en el sentido de absolutamente posible) Sí
Coloca puntaje	9	Muy posible (8)	9	6 (en el sentido de 9)
Justifica	Porque los dos van a encestar	Porque los 2 se ven en la foto que están asestando la pelota de basketball	Yo puse ese puntaje porque lo que se ve en la imagen es eso.	Porque en ambas ganara

Elaboración historia común. Justificaciones absolutas desde lo que se observa en la imagen  
Reconocimiento del suceso seguro. No hay duda -incertidumbre

Tabla 2: producciones de los niños en la situación 2 y su análisis posterior

Situación 3	N1 (11 a)	N2 (12 a)	N3 (10 a)	N4 (10 a)
¿Sabrías en ese momento que te la lanzará?	No	No se	Sí	No sabría
Coloca puntaje	9	1	9	3
Justifica	Porque se tiran de diferentes formas	Porque no se sabe a quién de los 5 amigos se lo va a tirar a otro	Yo puse ese puntaje porque yo he jugado ese juego, lo sé si me mira o la posición que ponga de su brazos si me apunta yo ya sabré queme la lanzará	Porque no sabría si me la tiran a mi

3 de 4 niños Reconocen implícitamente la aleatoriedad en reglas del juego y la incertidumbre de saber si les llegara la pelota. Hay un reconocimiento del desorden en las reglas del juego  
N3 no reconoce la aleatoriedad y ofrece justificaciones causales que refieren a frecuencia de la situación

Tabla 3: producciones de los niños en la situación 3 y su análisis posterior

## Conclusiones

Se constata la elaboración de predicciones, a través de sus historias de futuro, asociando grados de incerteza que se interpretan como adecuados, a las situaciones lo que indica que identifican su naturaleza aleatoria. Se reproduce el fenómeno de causalidad, reportado por Azcarate y otros 1998, que se interpreta de la falta de certeza de las historias que construyen y en la analogía con

experiencias anteriores, lo que se constata cuando el niño explica frecuentemente “*porque yo he visto que algunas veces sucede eso o así ha pasado cuando he jugado*”.

En respuestas como: “*no se puede ver el futuro*”; “*el juego no tiene orden,*” se interpreta como la identificación implícita de distintas variables que pueden influir en el resultado de una situación aleatoria, lo que permitiría intencionar la diferenciación entre lo aleatorio y lo determinista; estas últimas permiten la construcción de una única historia, mientras que las aleatorias dan lugar a historias con matices diferentes, lo que revela su naturaleza. En la situación tres, los estudiantes reconocen la aleatoriedad como influencia del caos en sus reglas, por lo que se presenta como apropiada para modelar, en este nivel, la incerteza.

Se aprecia que 2 de 4 niños tienen un pensamiento aleatorio más desarrollado, ya que sus justificaciones revelan la consideración de distintas variables para fundamentar las historias que construyen, lo que indica las diferencias cognitivas en el estadio preoperatorio.

Desatacamos el rol de las imágenes como medio de expresión de las predicciones que los estudiantes, que permitieron capturar con mayor sensibilidad la naturaleza de las situaciones, aproximándose a planteamientos reportados, como los de Abrahamson y Pfannkuch.

### Referencias bibliográficas

Azcárate, P., Cardeñoso, J.M. Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias* 16 (1), 85 – 97

Batanero, C. (2005) Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8 (3), 247–263.

Biehler • Pratt 2012, Research on the reasoning, teaching and learning of probability and uncertainty, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 819 - 923

Candela, A. (1999) Prácticas discursivas en el aula y calidad educativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 4, n° 8, 273-298. México.

Díaz, L. y Castro, I. (2011) Articulando prácticas para las fracciones con redes conceptuales. Ponencia in extenso en *Actas de la XIII CIAEM*, Recife, Brasil.

Méndez, Díaz (2012), Aceptaciones de aleatoriedad en tres grupos diferenciados, *Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática*. Chile.

Mineduc 2012 Bases Curriculares ciclo básico - Programas de curso ciclo básico

Ortiz, Batanero, Contreras 2012, Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 15, Vol. 1, 63 – 91

Vásquez, Parraguez (2011), Construcción del concepto Probabilidad: Una mirada perspectiva desde la teoría APOE, *25 Acta Latinoamérica de Matemática Educativa* p. 573 – 581