

Molina, M. y Castro, E. (2004). *Applets que promueven la comprensión de las situaciones de igualdad*. En Peñas, M.; Moreno, M.; Lupiáñez, J. L. (Eds.), X Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Tecnologías de la Información y la Comunicación (pp. 219-226). Granada: Dpto de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y sociedad THALES.

## **Applets que promueven la comprensión de las situaciones de igualdad<sup>1</sup>**

**Marta Molina González**  
Universidad de Granada  
[martamg@ugr.es](mailto:martamg@ugr.es)

**Encarnación Castro Martínez**  
Universidad de Granada  
[encastro@ugr.es](mailto:encastro@ugr.es)

### **Resumen**

En esta comunicación presentamos tres applets del NCTM, en los que se representan distintos tipos de balanzas virtuales. Dichos applets permiten trabajar con los alumnos la comprensión de la relación de igualdad y del significado relacional del signo igual. Además, pueden ser empleados para promover el desarrollo del sentido numérico y la comprensión de la resolución de ecuaciones algebraicas.

### **1. Los applets en la Enseñanza de las Matemáticas**

La integración de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TICs) en las materias del currículo regular es posible, y se está realizando, de muy diversas formas. Una de las tecnologías más empleadas es el ordenador, no sólo por la multitud de posibilidades que ofrece, sino también porque su utilización tiene efectos positivos sobre la actitud del alumno hacia el aprendizaje (Bohigas, Jaén y Novell, 2003).

En relación con los usos del ordenador en el aula, nos vamos a centrar en el uso de Internet y, más concretamente, en el papel de los applets como elementos de las páginas webs que confieren a Internet gran parte de su valor educativo como contexto en el que desarrollar un aprendizaje activo y motivador. Los applets son programas escritos en lenguaje de programación Java que pueden ser incluidos en páginas html de forma similar a como se incluyen las imágenes, y que pueden ejecutarse fácilmente por medio de cualquier navegador que tenga instalada la Máquina Virtual de Java. (Sun Microsystems, 2004). En la actualidad existen multitud de páginas web que contienen applets, muchas de las cuales están relacionadas con la enseñanza de las ciencias.

---

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido realizado dentro de un proyecto del Plan Nacional de I + D + I financiado por el MCyT con el número BSO2002-03035 y cofinanciado con fondos FEDER.

Los applets permiten, entre otras aplicaciones, la incorporación en páginas web de elementos móviles o mecanismos interactivos (Bohigas, Jaén y Novell, 2003). Su principal ventaja como instrumento educativo es que son fáciles de usar para los alumnos y el profesor, no siendo necesario emplear demasiado tiempo en su aprendizaje. Además, favorecen una metodología activa permitiendo al alumno ser el protagonista de su propio aprendizaje: investigando propiedades, aventurando y comprobando hipótesis, haciendo deducciones,...; situación ésta muy ligada al constructivismo.

### **1.1 Algunos casos de interés: Descartes y applets del NCTM**

Muestra de la importancia de los applets dentro de la aplicación de las nuevas tecnologías a la enseñanza, y concretamente a la enseñanza de las matemáticas, ha sido la creación del Proyecto Descartes (<http://descartes.cnice.mecd.es>) por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) del Ministerio de Educación Cultura y Deporte. Descartes es un proyecto que pretende hacer las matemáticas más interactivas y visuales mediante el uso del ordenador, y ofrecer una nueva forma de enfocar el aprendizaje de las matemáticas que contribuya a la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con el applet Descartes, que puede obtenerse gratuitamente en Internet, se pueden crear, de modo sencillo e intuitivo, applets de matemáticas, modificables y con animaciones. Además, se encuentran disponibles más de cien unidades didácticas en las cuales se emplean applets que pueden ser adaptados fácilmente por el profesor.

El NCTM también ha desarrollado un gran número de applets para facilitar un aprendizaje activo y con comprensión de las matemáticas. Algunos de estos applets aparecen recogidos en el CD que acompaña a los Principios y Estándares para las matemáticas escolares, del cual existe una versión traducida al español editada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Además, en la página web NCTM Illuminations <http://illuminations.nctm.org> se presentan un gran número de applets, algunos de ellos acompañados de lecciones o recomendaciones para su uso en el aula. Aunque estos applets son en inglés, su estructura es tan sencilla que su manejo es prácticamente intuitivo y puede deducirse mediante ensayo y error.

## **2. La igualdad y su representación simbólica: Dificultades en su comprensión.**

El principio de currículo de los estándares de la NCTM identifica la igualdad o equivalencia como uno de las ideas matemáticas básicas del currículo (NCTM, 2000). La igualdad es un importante concepto algebraico que los estudiantes deben encontrar y empezar a comprender desde los primeros niveles, siendo necesario que establezcan conexiones entre la notación simbólica y la representación de la igualdad (NCTM, 2000).

La mayoría de los alumnos presentan una adecuada comprensión de la relación de igualdad cuando se consideran experiencias físicas de modelización o problemas verbales (Schliemann y otros, 1998), sin embargo, surgen numerosas dificultades al considerar su representación simbólica. Según diversos estudios (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Falkner, Levi, y Carpenter, 1999; Molina, 2004), los alumnos de Educación Primaria encuentran serias dificultades en dotar de significado al signo igual en expresiones aritméticas. Alumnos de Educación Secundaria y Universidad continúan teniendo dificultades para usar el signo igual de forma correcta en diversos contextos (Byers y Herscovich, 1977).

La mayoría de los alumnos no perciben las igualdades aritméticas como la expresión de una relación sino que las interpretan como sentencias que indican una acción (Behr, Erlwanger y Nichols, 1980; Carpenter, Franke y Levi, 2003). Tienden a interpretar el signo igual como un símbolo operacional, es decir un estímulo para dar una respuesta, y tienen ideas definidas sobre como deben escribirse las igualdades, no aceptando las de la forma  $\_ = 2 + 5$  (afirmando que están al revés) o las igualdades que no incluyen signos operacionales (Ej.  $3 = 3$ ) o que incluyen signos operacionales en ambos miembros (Ej.  $3 + 5 = 7 + 1$ ). En un estudio recientemente realizado con una clase de alumnos de tercero de Primaria a los que planteamos la resolución de seis igualdades tales como  $8 + 4 = \_ + 5$  ó  $12 + 7 = 7 + \_$ , ningún alumno resolvió correctamente más de una igualdad (Molina, 2004). La reacción de la mayoría de los alumnos fue ignorar el último término y resolver así una igualdad de la forma  $a \pm b = c$ . Otras respuestas detectadas fueron: la combinación de todos los términos de la igualdad, la suma o resta de dos de los términos o la repetición de uno de los términos.

*¿Cuál es el origen de estas dificultades?*

Los estudios anteriormente referidos señalan la instrucción como principal causa de las dificultades observadas en la comprensión del signo igual. Concretamente se señala como principales causas de las dificultades que muestran los alumnos la reiterada consideración de igualdades con todas las operaciones en el lado izquierdo y la respuesta en el lado derecho, junto con la fuerte orientación al cálculo que se observa en la enseñanza tradicional de la aritmética. Estos estudios manifiestan la necesidad de que a lo largo de la formación matemática de los alumnos se consideren igualdades numéricas de variadas formas ( $a = b + c$ ;  $a + b = c + d, \dots$ ) y se realicen actividades que promuevan la comprensión del significado relacional del signo igual, habiendo observado que alumnos de incluso primero de Primaria son capaces de desarrollar una adecuada comprensión de este símbolo.

### **3. Pensamiento relacional en el contexto de las igualdades numéricas**

Los estándares de la NCTM (2000) recomiendan que desde los primeros años de escolarización se promueva el desarrollo del sentido numérico (núcleo de la educación matemática en los niveles elementales), y que, simultáneamente, se fomente el desarrollo del pensamiento algebraico con el objetivo de construir una base sólida de aprendizaje y experiencia para el posterior estudio formal del álgebra. En este caso proponemos abordar ambos objetivos desde la resolución de igualdades numéricas promoviendo el uso de pensamiento relacional, es decir, fomentando la resolución de igualdades mediante la comparación de los números o expresiones a ambos lados del signo igual y la observación de relaciones, sin necesidad de realizar explícitamente todas las operaciones expresadas (Carpenter, Franke, y Levi, 2003). Por ejemplo, en la igualdad,  $27 + 48 - 48 = \underline{\quad}$ , los alumnos pueden observar que sumar y restar 48 no altera la cantidad inicial, no teniendo que operar para deducir la respuesta. O en el caso de la igualdad  $8 + 4 = \underline{\quad} + 5$  pueden observar que 5 es una unidad más que 4 y, por lo tanto, la cantidad desconocida deberá ser una unidad menos que 8.

Este tipo de pensamiento no es muy frecuente en las aulas. Diversos estudios sobre la resolución de igualdades (Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999) han observado que los alumnos de Primaria no son capaces de resolver igualdades sin calcular la respuesta, debido a la falta de conocimientos sobre la estructura que subyace a las operaciones

aritméticas y sus propiedades. En cambio, estudios más recientes (Carpenter, Franke, y Levi, 2003; Molina, 2004), en los se ha prestado especial atención al desarrollo de pensamiento relacional, muestran que alumnos de incluso primero de Primaria son capaces de emplearlo al resolver igualdades numéricas.

La fuerte orientación al cálculo de la enseñanza tradicional de la aritmética ocasiona que cuando los alumnos se centren en el cálculo de las operaciones al abordar la resolución de igualdades numéricas y no se paren a observar las relaciones existentes entre los números y las operaciones a realizar (Molina, 2004). Se hace necesario que se fomente en el aula la observación de estas relaciones pidiéndoles expresamente a los alumnos que intenten resolver las operaciones o igualdades sin realizar todos los cálculos expresados, invitándoles a explorar distintas formas en las que pueden resolver un grupo de operaciones o abordando actividades que ayuden a hacer explícitas propiedades matemáticas fundamentales.

Una vez que los estudiantes empiezan a pensar en relaciones, las igualdades numéricas proveen de un contexto flexible en el cual pueden representarse relaciones o propiedades matemáticas y así focalizar la atención de los alumnos en ellas. Por ejemplo, igualdades como  $42 = 40 + 2$ ,  $2 + 40 = 42$ ,  $42 = 30 + 12$ , permiten abordar la estructura de nuestro sistema numérico decimal, y de forma similar, igualdades como  $3 + 4 = 4 + 3$  y  $10 + 5 = 5 + 10$  favorecen que los alumnos hagan conjeturas sobre la propiedad conmutativa de la suma. Carpenter, Franke y Levi (2003), entre otros autores, sugieren utilizar este tipo de igualdades numéricas para ayudar a los alumnos a hacer explícito su conocimiento informal de las propiedades aritméticas, con el objetivo de enriquecer su aprendizaje aritmético y que éste sirva de base para un aprendizaje con comprensión del lenguaje algebraico. Estas actividades favorecen el desarrollo de la comprensión semántica de la aritmética necesaria para posteriormente comprender y utilizar el álgebra (Booth, 1989).

#### **4. Tres ejemplos de applets para trabajar la comprensión de la igualdad y del significado del signo igual**

##### 4.1 Balanza de figuras (Shape Pan Balance)



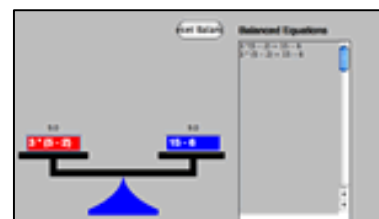
Esta balanza provee de un contexto interesante en el que abordar el concepto de equivalencia, y promover el desarrollo de pensamiento relacional. *Nivel para el que se recomienda:* Infantil, y Primaria

El applet representa una balanza virtual en la que se pueden pesar cuatro tipos de figuras de distintos pesos (cuadrados rojos, círculos azules, triángulos morados y rombos amarillos). La actividad consiste en encontrar las relaciones existentes entre los pesos de las figuras mediante el uso de la balanza, o alternativamente, encontrar conjuntos de figuras que equilibren la balanza. El programa permite seleccionar tantas figuras como se quiera y disponerlas en la balanza, la cual se equilibra o desequilibra según la relación existente entre los pesos de las figuras. Cuando se alcanza el equilibrio, aparecen automáticamente en una tabla de doble entrada las figuras del plato derecho y del plato izquierdo, quedando así un registro de las relaciones que el alumno va detectando. Este programa permite, además, reiniciar la actividad cambiando los pesos de las figuras mediante la tecla “New Problem”.

Hart y Keller (2002) sugieren diversas actividades para realizar con este applet que ayudan a los alumnos a entender la igualdad como una relación y no como una operación, y, además, a explorar las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de la relación de igualdad. Estas actividades complementan a las experiencias físicas que pueden realizarse con balanzas reales.

#### 4.2 Balanza numérica (Number Pan Balance)

La balanza numérica permite hacer la transición entre la simulación física del concepto de igualdad y la expresión escrita de esta relación en la aritmética. *Nivel para el que se recomienda:* Primaria.



El applet consiste de una balanza virtual en la que, en cada uno de los platos, se pueden escribir expresiones aritméticas. Cuando se introducen las expresiones, su valor numérico aparece sobre ellas, y la balanza se equilibra o desequilibra identificando el valor de las expresiones con su supuesto peso. Al igual que ocurre en la Balanza de Figuras, cuando el alumno detecta una relación de igualdad, es decir, cuando escribe en ambos platos expresiones de igual valor numérico, el programa registra dicha relación en una tabla,

empleando para ello el signo igual. Por ejemplo, si escribe  $13 + 5$  en el plato izquierdo y  $10 + 8$  en el derecho, aparece en la tabla la igualdad  $13 + 5 = 10 + 8$ .

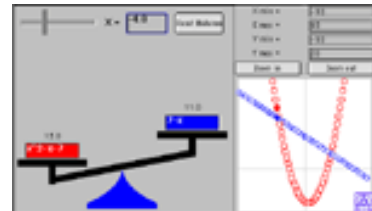
Mediante este applet puede favorecerse, no sólo la comprensión del signo igual, sino también el desarrollo de pensamiento relacional, la comprensión de propiedades de las operaciones aritméticas y en general el desarrollo del sentido numérico, considerándose actividades como las sugeridas en el apartado 3. Por su parte el NCTM propone actividades básicas que permiten dotar de significado a expresiones aritméticas de la forma  $a \pm b = c$  ó  $c = a \pm b$ . Por ejemplo, se propone tomar un número o una expresión en uno de los lados de la balanza y buscar expresiones que permitan equilibrar la balanza.

Gracias a que el programa va registrando las igualdades detectadas, posteriormente se pueden compartir y discutir las igualdades encontradas por cada alumno así como las propiedades o relaciones que aparecen implícitas.

Aunque el programa no aborda la expresión de las relaciones “mayor que” o “menor que”, consideramos que aporta un interesante contexto en el que tratar el uso de los símbolos  $>$ ,  $<$ .

#### 4.3 Balanza de expresiones algebraicas en una variable (Expression Pan Balance)

Este applet permite introducir a los alumnos a la resolución de ecuaciones algebraicas de una variable ( $x$ ) mediante el uso de una balanza virtual y la consideración de la representación gráfica de las funciones involucradas en la



ecuación. Para su uso es imprescindible que los alumnos comprendan el significado relacional del signo igual, y es recomendable que hayan trabajado previamente con la Balanza numérica. *Nivel para el que se recomienda:* Primaria, a partir de tercero o cuarto, y Secundaria.

Por una parte, la balanza permite comparar el valor de dos expresiones algebraicas para valores concretos (de hasta dos decimales) de la variable ( $x$ ). Para ello se escriben las expresiones algebraicas en ambos platos de la balanza empleando para las potencias de  $x$  de grado  $n$  la notación  $x^n$  o escribiendo dicha expresión como producto. Observando la variación de la balanza se puede encontrar o aproximar la solución o soluciones de la

ecuación. Además, el programa facilita la estimación de las soluciones de la ecuación permitiendo representar gráficamente ambas expresiones algebraicas (funciones). Para la representación gráfica debe indicarse el rango de variación de la “x” y de la “y”.

Este applet facilita la comparación de expresiones algebraicas permitiendo, no sólo abordar la resolución de ecuaciones algebraicas de una sola variable, sino también la resolución de inecuaciones. La utilización simultánea de la balanza y la representación gráfica hace que la comprensión de los conceptos puestos de manifiesto sea más compleja que en los applets anteriormente comentados, pero tiene un gran potencial para favorecer la comprensión de la resolución de ecuaciones y su relación con la representación gráfica de ambas expresiones algebraicas.

### **Referencias**

- Behr, M, Erlwanger, S., y Nichols, E. (1980). How children view the equal sign. *Mathematics Teaching*, 92, 13-15.
- Bohigas, X., Jaén, X. y Novell, M. (2003). Applets en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias*, 2003, 21 (3), 463-472.
- Booth, L. R. (1989). A question of structure. En Wagner, S., y Kieran, C. (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Virginia: LEA y NCTM.
- Byers, V., y Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching*, 81, 24-27.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Hart, E. W. y Keller, B. A. (2002). Glimpses of the concept of equivalence across the grades. NCTM.
- Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999). From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative. *V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA)*, Puerto Elizabeth.
- Molina, M. (2004). *Resolución de Igualdades Numéricas por Estudiantes de Tercer Grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional*. Trabajo de Investigación Tutelada. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.



- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- Schliemann, A., Carraher, D., Brizuela, B., y Jones, W. (1998). Solving algebra problems before Algebra Instruction. NSF. (ERIC No. ED 446 895).
- Sun Microsystems (2004). Java-Sun. <http://java.sun.com/applets> (Consulta: 6/10/2004)

### **1. Datos Personales y profesionales:**

Marta Molina González

DNI: 29084208

Email: martamg@ugr.es

Domicilio: Nuestra Señora de la Salud, 4, 3° Q, C.P. 18014, Granada.

Becaria F.P.U. del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

### **2. Nivel al que va dirigido:** Primaria (principalmente) y Secundaria

### **3. Contenido que trata:**

Ejemplos de applets para la Enseñanza de las Matemáticas que promueven la comprensión de la relación de igualdad, del significado del signo igual y del desarrollo de pensamiento relacional.