

# ANÁLISIS DIDÁCTICO PARA ESTUDIAR LA REFLEXIÓN DE PROFESORES SOBRE MODELIZACIÓN EN ÁLGEBRA<sup>1</sup>

## Didactic Analysis to Study the Teachers' Reflection in the Modeling in Álgebra

Elisabeth Ramos-Rodríguez<sup>a</sup>, Pablo Flores Martínez<sup>b</sup>, João Pedro da Ponte<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, <sup>b</sup>Universidad de Granada, <sup>c</sup>Universidad de Lisboa

### Resumen

*En la investigación conducente a una tesis doctoral, estudiamos cómo reflexionan sobre su enseñanza, profesores de matemáticas, mientras participan en un curso de formación. La reflexión comienza seleccionando un problema profesional. Una de las parejas de profesores se planteó profundizar en las dificultades que tienen los alumnos para traducir enunciados a expresiones algebraicas (que los profesores llaman modelización). Para poder interpretar la reflexión hemos realizado un análisis didáctico de la enseñanza del álgebra en el inicio de secundaria. En esta comunicación presentamos algunas apreciaciones sobre el papel de la modelización en álgebra y su relación con los diferentes "roles de las letras en álgebra", que nos servirán para interpretar los planteamientos y reflexiones de los profesores.*

**Palabras clave:** enseñanza del álgebra, modelización, rol de letras.

### Abstract

*In the investigation conducive to a doctoral thesis, we study how they reflect about his teaching, teachers of mathematics, while they take part in a training course. The reflection starts by selecting a professional problem. One of the pairs of teachers considered to penetrate in the difficulties that the pupils have to translate terms of reference into algebraic expressions (that the teachers are called a modeling). To be able to interpret the reflection we have realized a didactic analysis of the education of the algebra in the beginning of secondary. In this communication we present some appraisals on the paper of the modeling in algebra and his relation with different "roles of the letters in algebra", that will serve us to interpret the ideas and reflections of the teachers.*

**Keywords:** teaching algebra, modelling, role of letters.

### INTRODUCCIÓN

Estudiar los procesos ligados a la formación de profesores es una línea de investigación ampliamente desarrollada dentro de la didáctica de la matemática. Dentro de los trabajos que atienden al desarrollo profesional, una línea importante se ocupa de la reflexión del docente como un proceso que le ayuda a fundamentar su autonomía, a la vez que le permite relacionar su proceso de formación con su desempeño profesional en aula.

En un estudio doctoral nos hemos propuesto como objetivo principal analizar la reflexión sobre la práctica referente a un problema del álgebra, en un programa de formación continua, consistente en un curso impartido en Chile el año 2012.

En dicho estudio se utiliza el análisis didáctico, para profundizar en la problemática profesional que el grupo analizado ha seleccionado, relativa a la enseñanza del álgebra. El propósito de esta comunicación es presentar algunos resultados de este análisis, centrándonos particularmente en el análisis de contenido.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P., y Ponte, J. P. (2014). Análisis didáctico para estudiar la reflexión de profesores sobre modelización en álgebra. En J. L. González, J. A. Fernández-Plaza, E. Castro-Rodríguez, M. T. Sánchez-Compañía, C. Fernández, J. L. Lupiáñez y L. Puig (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática - 2014* (pp. 135-143). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

A continuación mostramos algunos aspectos del análisis didáctico como herramienta de apoyo al investigador, que ejemplificamos examinando el papel de la letra en el álgebra y la modelización.

## **ANÁLISIS DIDÁCTICO**

Para facilitar tanto nuestra actuación durante el curso, como el análisis de las producciones de los docentes sobre la enseñanza del álgebra, desarrollamos parte del proceso de análisis didáctico que se lleva a cabo en el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la Universidad de Granada. El análisis didáctico (Rico, 1997), aunque tiene un origen teórico, su objetivo es eminentemente práctico, al facilitar al profesor el proceso sistemático de diseño de unidades didácticas (Rico, 1997). Gómez (2007), señala que “el análisis didáctico es un procedimiento que permite explorar, profundizar y trabajar diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (p.18-19). Por tanto, permite al profesor organizar el saber desde dos ámbitos, desde las matemáticas y desde la enseñanza.

Este análisis se compone de cuatro subanálisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación. Para interpretar las intervenciones de los profesores hemos profundizado en el análisis de contenido sobre el álgebra escolar, a partir de dos elementos: la modelización y el uso de la letra.

### **Modelización**

El proceso de modelización en educación matemática es un tema de interés que tiene espacio en reuniones científicas como la International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA) (Matos, Blum, Houston y Carreira, 2001; Niss, Blum y Huntley, 1991), la International Conference in Mathematics Education (ICME) (Gómez y Waits, 2000), en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en la Asian Technology Conference in Mathematics y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre muchas otras. Diversos investigadores han mostrado interés en conceptualizar este proceso con miras a su comprensión, como Blum (1991), Castro y Castro (1997), Cross y Moscardini (1985), Galbraith y Haines (1997), Ponte (2004); Ríos (1995), Swets y Hartzler (1991), Stewart y Pountney (1995), entre otros. En la revisión realizada observamos que el término modelización tiene diversas acepciones.

Considerando los aportes de investigadores (Arora y Rogerson, 1991; Castro y Castro, 1997; Ríos, 1995; Swets y Hartzler, 1991) denominaremos modelización matemática “...al proceso de concebir el modelo matemático” (Swetz y Hartzler, 1991, p.1), proceso que contribuye a realizar una aproximación a problemas del mundo real mediante las matemáticas (Ríos, 1995); forma parte de la resolución de problemas (Swets y Hartzler, 1991). La modelización matemática es “...el arte y ejercicio de construir y trabajar con modelos matemáticos.” (Arora y Rogerson (1991, p.12). Por tanto es fundamentalmente una forma de resolución de problemas de la vida real (Ponte, 2004), que conlleva la consideración del problema como un todo, como lo veremos más adelante al examinar las etapas del proceso de modelización.

Con el fin de examinar la modelización como proceso, varios autores han considerado ciertos esquemas que permiten estudiarla de manera más precisa (Castro y Castro, 1997; Blum, 1991, Blum y Niss, 1991; De Lange, 1997; Swets y Hartzler, 1991, entre otros). A partir de estos autores asumiremos el proceso de modelización como un proceso que conlleva cuatro fases principales, ilustradas en la figura 2.

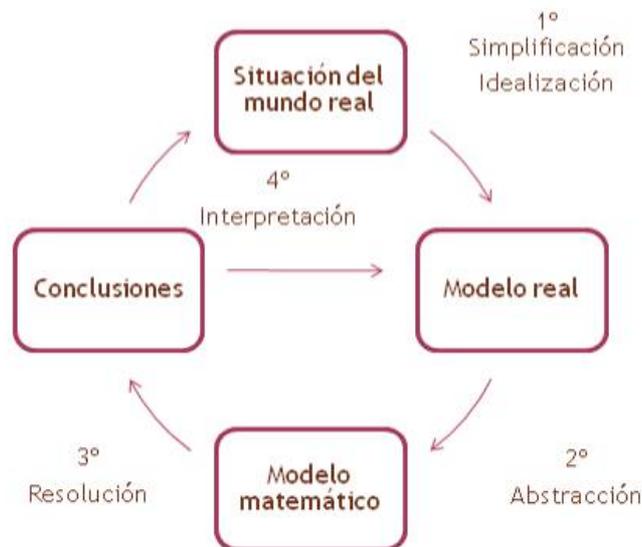


Figura 2. Proceso de modelización matemática

Estas fases se describen como:

- *Identificación del modelo real.* A partir de situaciones del mundo real se identifica una situación susceptible de ser tratada con herramientas matemáticas. En este primer momento se perciben cuestiones e interrogantes procedentes de un mundo de fenómenos, que dan lugar a problemas para cuya respuesta es necesario un proceso de abstracción y simplificación. Se constituye la imagen de alguna parte objetiva existente en la realidad. Se hace necesario entender la estructura, idealizar y precisar el sentido de la situación o problema real, enmarcado sobre la base del contexto en el cual se construirá el modelo real. Aquí se incluye la posible toma de datos y su organización para análisis posterior;
- *Construcción del modelo matemático.* Momento de abstracción, en el que el sujeto focaliza la atención sobre propiedades específicas de la situación y considera esas propiedades aisladas de la situación original (Harel y Tall, 1991). Al modelizar se establecen los datos, conceptos, relaciones, condiciones y premisas que serán traducidos al lenguaje matemático;
- *Elección de los contenidos y utilización de métodos matemáticos apropiados.* En este momento se acude a los conceptos y técnicas matemáticas;
- *La interpretación y validación de las conclusiones.* Se contrastan directamente con la situación del mundo real que está siendo estudiada, o a través del modelo real configurado en la modelización realizada. Las conclusiones matemáticas obtenidas serán traducidas del lenguaje del modelo matemático al lenguaje de la situación real. Cuando los resultados de esa comparación realidad-modelo son favorables termina el proceso de modelización. En caso contrario se reinicia el proceso para refinar el modelo existente o para buscar otro diferente, siempre teniendo como norte encontrar un modelo aceptable.

En la figura 2, se refleja el carácter cíclico del proceso de modelización que promulgan los autores mencionados, lo cual le confiere una estructura dinámica y flexible que permite su permanente enriquecimiento e incorporación de nuevas interrogantes, cada vez que se desea modelizar una situación dada.

### La letra en álgebra

El tratamiento de expresiones, la solución de problemas y la modelación de situaciones reales mediante el uso del álgebra requieren de una comprensión global y flexible del concepto de

variable. No sería exagerado decir que, a nivel elemental, el álgebra gira en torno a esta idea. Sin embargo, a pesar de su papel protagónico, este concepto es muy difícil de definir, ya que la variable en el álgebra se presenta con caracterizaciones que varían según el problema en el que ésta está involucrada (Trigueros, 1999). Considerando además que la solución competente de los problemas algebraicos requiere un manejo flexible de los tres usos de la variable y de los aspectos que caracterizan a cada uno de ellos (Ursini y Trigueros, 2006), hemos incluido el tema como parte de los contenidos a tratar con los docentes dentro del curso formativo, constituyendo un apartado especial dentro del análisis de contenido sobre el álgebra escolar.

Las profesoras protagonistas de nuestro estudio seleccionaron para su estudio un problema ligado a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, en específico a la traducción del lenguaje verbal al algebraico. Nuestra elaboración de un análisis de contenido sobre el álgebra escolar nos lleva a apreciar que las profesoras estudiadas enfatizan la representación simbólica formal de las expresiones algebraicas, para lo cual utilizan letras que adquieren un significado específico. Con objeto de comprender mejor el significado que le atribuyen a las letras, hemos estudiado el papel de la letra en el álgebra escolar, partiendo del papel que adquiere con mayor generalidad, el de variable.

La función que le asignamos a las letras y símbolos varía de acuerdo al contexto y al contenido matemático en donde se desenvuelven. Filloy (1999) hace hincapié en la fuerza que tienen los símbolos:

“los símbolos matemáticos no tienen interpretación única y, por lo tanto, una lectura correcta de los mismos requiere de una reconceptualización de los objetos matemáticos que dichos símbolos representan, cuando se pasa de un contexto a otro (del aritmético al algebraico)” (Filloy, 1999, p. 50).

Esto nos hace notar la diferencia entre variable y letra. En primer lugar la variable es un objeto matemático que indica variabilidad y que se simboliza generalmente con una letra. El uso que se le asigna a la letra repercute en el significado de la variable, por lo tanto la comprensión de los distintos usos de las letras es fundamental para llegar al de la variable.

Küchemann (1980) identificó seis maneras de interpretar los símbolos literales o letras, a saber:

- *letra evaluada*, a la letra se le asigna un valor numérico;
- *letra no utilizada*, la letra es ignorada o su existencia es reconocida pero no se le atribuye ningún significado;
- *letra como objeto*, se considera la letra como una abreviación del nombre de un objeto o como a un objeto en sí;
- *letra como incógnita específica*, representando un número particular pero desconocido y los alumnos son capaces de operar directamente sobre ella.
- *letra como número generalizado*, por lo que representa o es capaz de asumir distintos valores;
- *letra como relación entre cantidades*, en cuyo caso representa un rango de valores no especificados, mediante una relación sistemática entre dos conjuntos de valores de este tipo.

El papel de la letra para un objeto matemático puede ser variable. Así por ejemplo, en el caso de las expresiones algebraicas la letra toma el papel de número generalizado. En el caso de las ecuaciones (igualdad de expresiones) puede ser considerado (según el contexto) como incógnita o como relación funcional. Cuando hablamos de representaciones algebraicas no estamos particularizando a ecuaciones, ni a expresiones ni a funciones, etc., por tanto, en este caso, el uso de la letra (y por ende el significado de la variable) depende del contexto.

Considerando el trabajo de Kücheman (1980), Ursini y Trigueros (Trigueros, 1999; Ursini y Trigueros, 2006), identifican tres formas principales en las que se manifiestan las variables en el álgebra escolar:

- *La variable como incógnita*, es decir, como un número desconocido. Aparece desde los primeros años escolares cuando los alumnos empiezan a trabajar con problemas, aunque la incógnita no se representa mediante una letra sino mediante otros signos, como una raya, un cuadrado, un espacio vacío, etc. Este signo se sustituye por la letra al iniciarse la enseñanza del álgebra propiamente tal.
- *La variable como número generalizado*, se refiere a la variable como una herramienta que se usa en matemáticas para expresar propiedades derivadas de una generalización. Cuando se quiere expresar un patrón, una regularidad o un método general en matemáticas, se usan variables para indicar la generalidad de los números involucrados. Por ejemplo, para expresar propiedades de los números reales, o bien el término general de sucesiones de números reales, como por ejemplo, la sucesión  $1 + \frac{2}{3}, 2 + \frac{3}{4}, 6 + \frac{4}{5}, 24 + \frac{5}{6}, \dots$  se puede

generalizar con la expresión algebraica  $n + \frac{n}{n+1}$ .

- *La variable en una relación entre cantidades*, es decir, las variables que expresan una relación entre dos cantidades que cambian. Cuando se usa así, las características principales de la variable son su variación en un rango de valores y el hecho de que el cambio en una de las variables produce un cambio en el valor de la otra. Esta característica se enfatiza cuando la relación funcional se concibe como la expresión del cambio (Trigueros, 1999). Bajo esta concepción, una variable es un *argumento* (es decir, un valor del dominio de una función) o un *parámetro* (es decir, representa un valor del cual dependen otros valores). Solo en esta concepción toman sentido las nociones de variable independiente y dependiente.

De esta forma letras y variables están relacionadas, pero se debe tener en cuenta que no toda simbolización literal representa una variable, solo tres de las seis clasificaciones de las letras tiene que ver con el significado de la variable, como se ilustra en la figura 3.

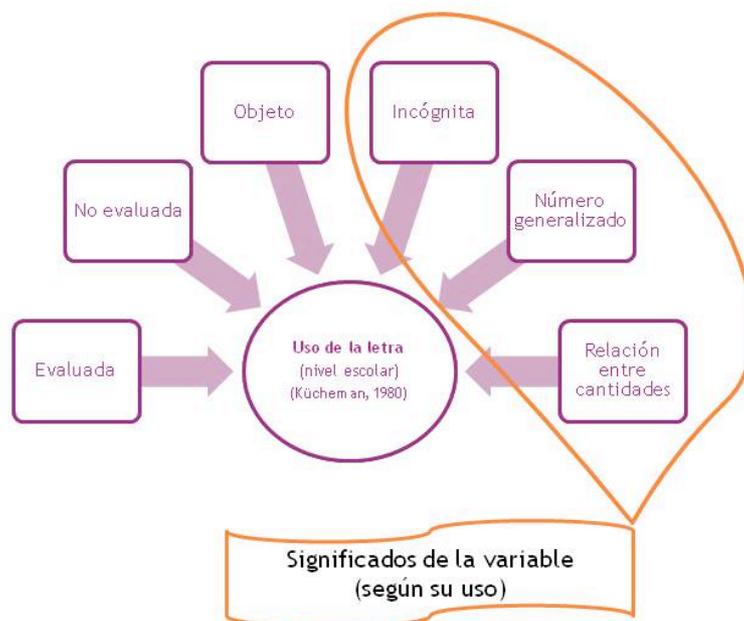


Figura 3. La letra y los significados de la variable

## La modelización en álgebra

En esta sección estudiamos el papel específico que desempeña la modelización en el álgebra, examinando su relación con el papel que juega la letra.

Sabiendo que el análisis de contenido de un concepto matemático arranca identificando su significado en la terna Definición-Representación-Fenómeno, podemos identificar y ubicar elementos implicados en problemáticas educativas referentes a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, como lo ilustra la figura 4.

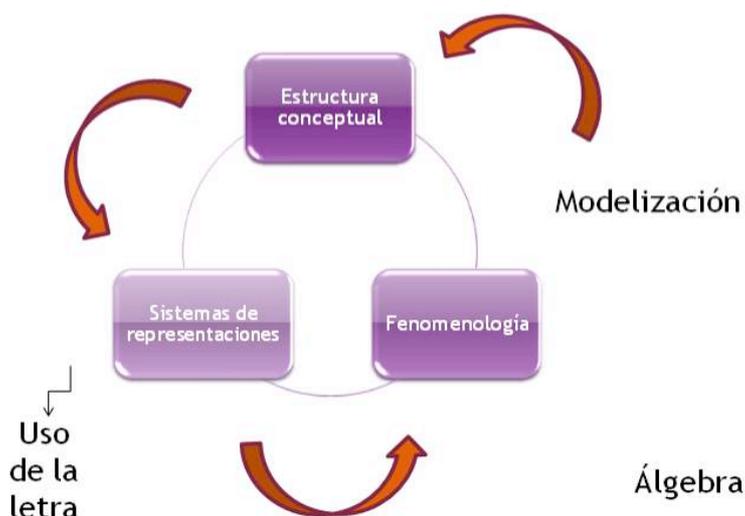


Figura 4. Dimensiones del significado del concepto matemático y su relación con el álgebra, la modelización y el uso de la letra

A través de este esquema, focalizamos nuestra atención sobre dos aspectos que se destacan en el tratamiento del álgebra, el papel de la modelización y el uso de la letra. La modelización se ubica en la relación entre la estructura conceptual y la fenomenología de los conceptos algebraicos. El sistema de representación literal adquiere una gran importancia en álgebra escolar, por medio del lenguaje algebraico, en cuyo desarrollo juegan un papel importante los distintos papeles de la letra en el álgebra. La articulación de estos dos elementos (modelización y usos de la letra) que llevamos a cabo en el análisis de contenido, suministra referentes importantes con los que estudiar la problemática del grupo.

En el caso de la modelización matemática (figura 2), considerando el simbolismo algebraico como modelo matemático, es posible apreciar la presencia de la letra en el proceso, como se ilustra en la figura 5.

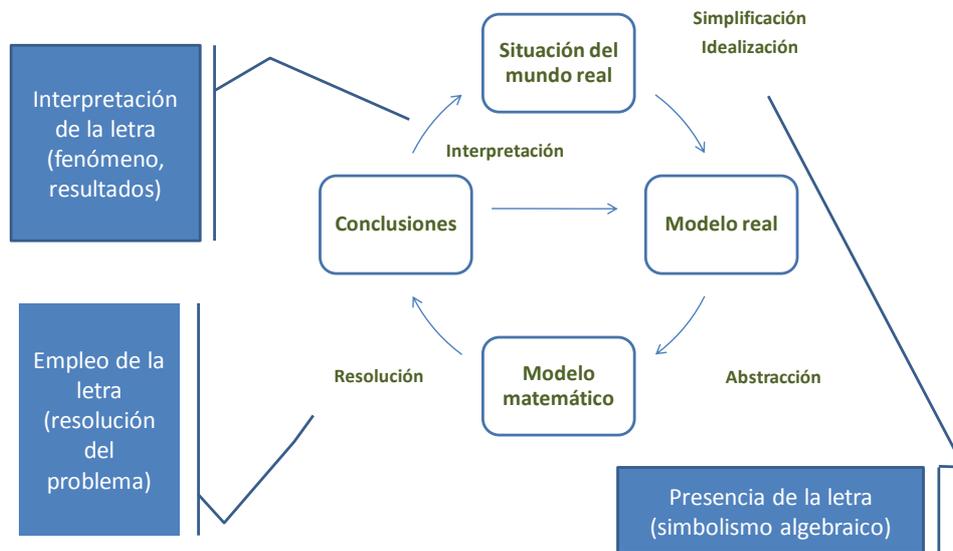


Figura 5. El uso de la letra en la modelización matemática en el caso del simbolismo algebraico como modelo matemático

Desde esta perspectiva, en la segunda etapa de la modelización aparece la letra como simbolismo algebraico para representar elementos del fenómeno o modelo real. Llevando este análisis al plano de la matematización (Rico, 2007), la matematización horizontal involucra diversas actividades de las que destacamos: representar el problema de modo diferente, comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal, encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera, traducir el problema a un modelo matemático, utilizar herramientas y recursos adecuados. Todas estas actividades sugieren usos de la letra en distintas formas y niveles. Así por ejemplo, comprender la relación entre el lenguaje natural y el simbólico, exige un manejo de ambos sistemas de representación y, en el caso del simbólico, el manejo de la letra en el papel adecuado a la situación.

En la tercera etapa del proceso de modelización, la letra se emplea para resolver el problema, lo que conlleva una serie de actividades por parte del estudiante desde el punto de vista de la matematización. En concreto: usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones, refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos, argumentar, generalizar.

Por último en la etapa final, la letra es interpretada de acuerdo al fenómeno estudiado.

Este análisis lo ilustramos a partir del esquema de la figura 6.

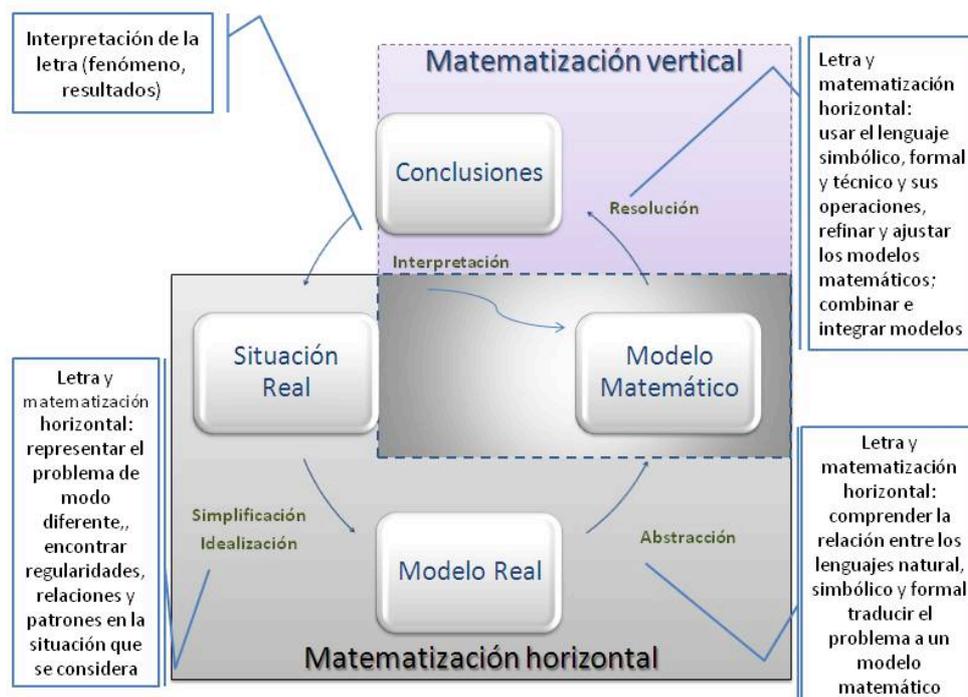


Figura 6. La letra, la modelización y la matemización

Este esquema nos permite mirar con mayor profundidad las tareas que plantean los profesores para favorecer que los alumnos lleven a cabo la modelización (contemplada como matemización). Por ejemplo, una propuesta de tarea matemática escolar que lleve a representar la situación real de diferentes modos, como por ejemplo, empleando esquemas, diagramas, tablas, etc., puede mostrarnos que el docente ha tomado en cuenta el uso de la letra en forma más concreta y explícita, antes de afrontar la simbolización y el uso de la letra como incógnita. En el caso de las profesoras estudiadas, éstas consideran el uso de diagramas en el diseño de las tareas, otorgándoles en una primera instancia un rol verificador del modelo matemático que los alumnos construyen. Más adelante, en el proceso reflexivo las docentes le dan un rol mediador para la construcción del modelo matemático, evidenciando una mayor profundización en su problemática.

## CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado algunos elementos del análisis de contenido dentro de lo que es el análisis didáctico referido a la enseñanza del álgebra. Esta profundización nos ha obligado a examinar cómo se entiende la modelización en álgebra y cómo se relaciona con el papel de las letras. De esta forma hemos contado con elementos más precisos para analizar la reflexión de las profesoras estudiadas, apreciando qué protagonismo conceden al papel de las letras y caracterizar qué entienden por modelización en álgebra. Así hemos podido interpretar las diversas reformulaciones en las tareas de enseñanza propuestas por las profesoras investigadas, examinando manifestaciones de la reflexión que realizan sobre su práctica. Con ello ampliamos la visión del análisis didáctico como herramienta para apreciar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Rojas, Flores y Ramos, 2013), incluyendo otras funciones como las consideradas en este escrito.

## Referencias

Arora, M. S., & Rogerson, A. (1991). Future trends in Mathematical modelling and applications. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley (Eds.), *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp.111-116). New York: Ellis Horwood.

- Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching. A review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum & I. Huntley, *Teaching and Mathematical Modelling and Applications*, pp. 10-29. Chichester: Ellis Horwood Limited.
- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction, *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 37–68.
- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Cross, M., & Moscardini, A. O. (1985). *Learning the art of mathematical modelling*. John Wiley y Sons, Inc.
- De Lange, J. A. N. (1997). Using and Applying Mathematics in Education. *International Handbook of Mathematics Education*, 4, 49.
- Fillooy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Gómez, P., y Waits, B. (Eds.) (2000). *Papel de las calculadoras en el salón de clase*. Bogotá: Una empresa docente.
- Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 38-42.
- Küchemann, D. (1980), Children's Understanding of Integers, *Mathematics in School*, 9, 31-32.
- Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K., & Carreira, S. P. (Eds.) (2001). *Modelling and mathematics education: ICTMA 9 – Applications in science and technology*. Chichester, UK: Horwood.
- Niss, M., Blum, W., & Huntley, I. (Eds.) (1991). *Teaching and mathematical modeling and applications*. New York: Horwood.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Rojas, N., Flores, P., y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza. En L. Rico, J.L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico e Investigación en Educación Matemática*. Granada, España.
- Ríos, S. (1995). *Modelización*. Madrid: Alianza.
- Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Stewart, M., & Pountney, D. (1995). *Learning Modelling with Derive*. London: Prentice Hall.
- Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum. A resource guide of classroom exercises*. Reston, VA: NCTM.
- Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid. España.
- Ursini, S., y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión del concepto de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Educación Matemática*, 18(3), 5-38.

---

<sup>1</sup> Este trabajo ha sido financiado por la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile) y por medio de una Beca del gobierno de Chile a través de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT. Realizado dentro del Proyecto: “Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, EDU2012-33030”, del Ministerio de Economía y Competitividad de España.