UTILIZACION DE UN MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO PARA LA ENSEÑANZA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Martha Beatriz Fascella – Hugo Víctor Masía
Univ. Nacional de Rosario - Univ. Tecnológica Nacional - República Argentina
mbfascella@yahoo.com - hvmasia@hotmail.com
Campo de Investigación: Modelos Matemáticos; Nivel educativo: Superior
Palabras Clave: Ecuaciones Diferenciales - Modelos Económicos - Solow - Problemas Motivadores.

RESUMEN

Uno de los objetivos de la investigación en el contexto de la Matemática educativa es promover metodologías que fortalezcan sus procesos de enseñanza-aprendizaje. Si se pretende que los alumnos manejen criterios que le permitan optimizar un proyecto desde su concepción para obtener los mejores resultados, debe transformarse la clase en una instancia fuertemente interactiva, de modo que los conocimientos aprendidos queden grabados en la mente de esos futuros profesionales.

Este trabajo muestra el uso de un Modelo de Crecimiento Económico como motivación para la enseñanza de Ecuaciones Diferenciales en carreras de Economía. Al respecto, introduciendo problemas vinculados con la especialidad se posibilita la interacción entre la matemática y otras ciencias, como por ejemplo la economía.

1. INTRODUCCION

En la enseñanza de la Matemática, en particular en la enseñanza de ecuaciones diferenciales en carreras en las cuales la matemática cumple un rol instrumental, debe darse prioridad a la comprensión de los conceptos y las aplicaciones del conocimiento tratando de minimizar el tiempo que se dedica a cálculos rutinarios y operatoria estéril. Para lograr la comprensión de conceptos es sensato tratar de motivar al alumno mediante la proposición y análisis de problemas afines con su especialidad. Así, las presentaciones deberían efectuarse en forma geométrica, numérica y algebraica, teniendo en cuenta que las representaciones visuales, la experimentación numérica y gráfica han producido cambios en la forma de enseñar el razonamiento conceptual. Si ello es adecuadamente complementado con calculadoras y/o computadoras, seguramente se logrará una mejor calidad de la enseñanza pues el uso de software permite inmediatas verificaciones de propiedades, representaciones gráficas, así como resolución de problemas en situaciones reales, constituyendo una ayuda importante para la exploración inductiva del conocimiento por la inmediatez de la respuesta del procesador.

Esta modalidad de enseñanza planteada es posible únicamente si la metodología de trabajo en las clases se basa en la activa participación de los alumnos. El presente trabajo se plantea, entonces, respondiendo a tal metodología.

2. ORGANIZACION DE LOS CONTENIDOS

- Presentación de un Problema Motivador.
- Desarrollo de la Teoría Matemática de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden. Resolución de algunos ejemplos. (Omitido en este trabajo).
- Desarrollo de la Teoría Económica necesaria para la resolución del Problema y resolución del Problema Motivador.
- Resolución del mismo problema utilizando software matemático.
- Consideraciones finales y conclusiones.
- Referencias bibliográficas.

3. PROBLEMA MOTIVADOR

Investigaciones efectuadas por un equipo de analistas permiten admitir que la función de producción Q de una economía está dada por:

$$Q = K^{3/4} L^{1/4},$$

donde K es la acumulación de capital y L la fuerza de trabajo. La tasa de crecimiento de la fuerza laboral es $n = 0{,}05$; la propensión al ahorro $s = 0{,}2$; y la depreciación del capital $d = 0{,}03$. Inicialmente la acumulación de capital per cápita es $k_0 = 25$.

Utilizando el modelo de crecimiento de Solow, se pretende hallar la trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita k , y su valor de equilibrio a largo plazo.

4. MODELO: MODELO DE CRECIMIENTO ECONOMICO DE SOLOW

El modelo de crecimiento económico de Solow intenta prever la tendencia del producto potencial en el largo plazo, analizándolo mediante la relación entre la acumulación de capital, el ahorro, la fuerza de trabajo y el crecimiento.

Para su mejor comprensión, se definen las variables con las cuales se trabajará:

Tiempo (variable continua):	t	Fuerza de trabajo:	L
Producto total:	Q	Producto per cápita:	$q = Q / L$
Acumulación de capital:	K	Capital per cápita:	$k = K / L$
Inversión:	I	Ahorro:	S
Propensión marginal al ahorro:	s		

Todas las variables definidas son funciones del tiempo t , aunque ello será omitido en la notación, por razones de simplicidad.

SUPUESTOS BASICOS Y DESARROLLO DEL MODELO:

El modelo de Solow básico, apela a varias hipótesis simplificadoras. Supone:

- La existencia de un equilibrio dinámico, o sea no existe desequilibrio y ni desempleo.
- El punto de partida es la función de producción Q definida por
$$Q = F(K, L), \qquad (1)$$
en la cual K y L son las variables antes definidas. Se trabajará con las variables involucradas en términos per cápita.
- La población y la fuerza de trabajo son iguales, con variación exponencial dada por
$$L = L(t) = L_0 e^{nt}, \qquad (2)$$
en la que n es una constante. Nótese que $L'(t) = nL(t)$, por lo que $n = L'/L$ representa la tasa de crecimiento referida a la fuerza de trabajo (relación constante entre tasa de crecimiento y fuerza de trabajo). Se la supone independiente de otras variables del modelo, y determinada por factores biológicos y otros factores exógenos.
- La función de producción Q tiene rendimientos constantes a escala. Esto significa que la función de producción global es homogénea de grado uno, es decir:
$$Q = F(K, L) = L\,F(K/L, 1) = L f(k).$$
Así resultará
$$q = f(k), \qquad (3)$$
donde la función f deberá ser una función creciente de la variable k pero su crecimiento "menos que proporcional a k ". Más precisamente, valores crecientes de k deben producir valores crecientes de q, pero a una tasa decreciente.
- La economía es cerrada al comercio con otros países, y no existe sector público. Así, en condiciones de equilibrio, la inversión interna I será igual al ahorro nacional S :
$$I = S. \qquad (4)$$

- La tasa de cambio del stock de capital es igual a la inversión neta de la depreciación. Con un stock de capital K, supone que la depreciación es una proporción fija de K, igual a dK, siendo d el coeficiente de proporcionalidad de esa depreciación.

$$K' = I - dK. \qquad (5)$$

- El ahorro es una proporción fija del producto nacional, esto es $I = S = sQ$, por lo cual

$$K' = sQ - dK. \qquad (6)$$

De (6) se obtiene la relación entre las variables en términos per cápita:

$$K'/L = sq - dk. \qquad (7)$$

- El avance tecnológico está dado a una tasa de crecimiento λ, definida como la tasa de variación de la productividad del trabajo. Si $E(t) = L(t)\,e^{\lambda t}$, resultará entonces $E(t) = L_0\,e^{(n+\lambda)t}$. Así, conocido el valor inicial L_0, $E(t)$ dependerá del ritmo de crecimiento biológico n, y del ritmo de crecimiento de la productividad del trabajo λ.
- Se hará la suposición simplificadora de que no hay progreso tecnológico, o sea $\lambda = 0$.

Con las suposiciones efectuadas, realizando las operaciones adecuadas, se obtiene:

$$\boxed{k' = sf(k) - (n+d)k.} \qquad (8)$$

Esta es la ecuación fundamental de la acumulación de capital. Es una ecuación diferencial de primer orden en la incógnita k, con dos parámetros (s, n), cuya función solución $k = k(t)$ describe la trayectoria temporal del capital per cápita (o razón capital / trabajo). El tipo de ecuación que finalmente resulte dependerá de la función de producción global que se utilice.

La ecuación muestra que la acumulación de capital per cápita crecerá con una rapidez dada por la tasa de ahorro per cápita, a la que se sustrae el término $(n+d)k$.

Este último término se interpreta de la siguiente manera: La fuerza laboral crece a una tasa n, por lo que una parte del ahorro per cápita debe ser usado para equipar a los nuevos trabajadores de la fuerza laboral. Al mismo tiempo, otra parte del ahorro dk se destina a reponer el capital depreciado. De tal modo, $(n+d)k$ es la parte del ahorro per cápita que debe usarse tan solo para mantener invariable el coeficiente capital / trabajo en el nivel k. Si el ahorro supera al monto $(n+d)k$, resulta $k'(t) > 0$, representando esto un aumento en el coeficiente capital / trabajo.

La parte del ahorro per cápita utilizado para equipar a los nuevos trabajadores que ingresan a la fuerza laboral se denomina *ampliación del capital*. El ahorro neto per cápita se llama *profundización del capital*. De tal modo en la ecuación fundamental es

Profundización del capital = Ahorro − Ampliación del capital − Depreciación.

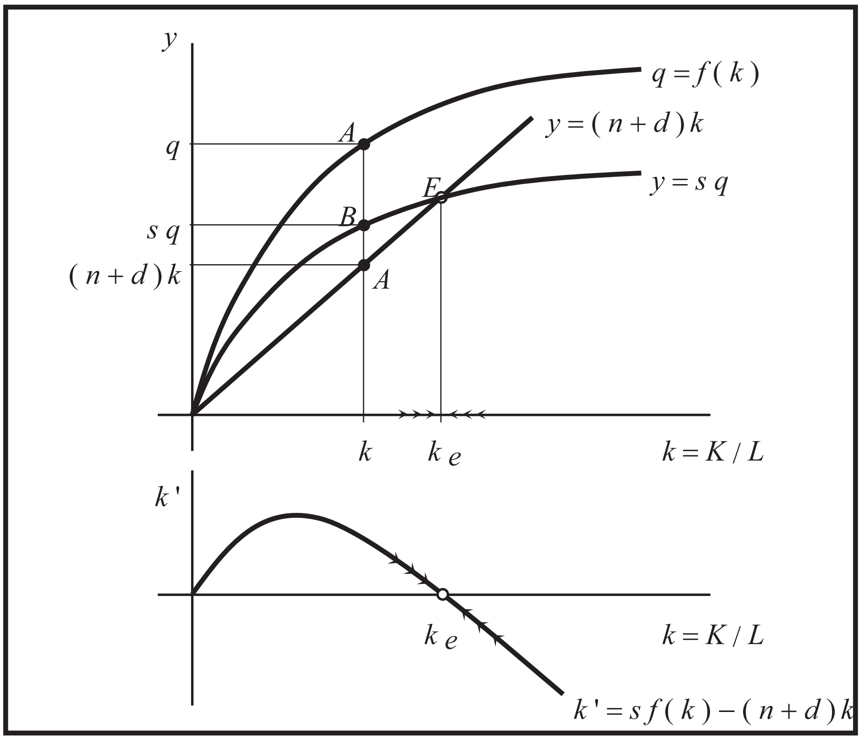
En *estado estacionario* o de *equilibrio estable*, es decir cuando se llega a una situación de equilibrio en el largo plazo de la economía, el capital per cápita alcanza un valor de equilibrio y permanece invariable en ese nivel. Como consecuencia, el producto per cápita también alcanza un estado estacionario (considerando el progreso tecnológico nulo). Así, en estado estacionario tanto k como q alcanzan un nivel permanente. Para alcanzar el estado estacionario, el ahorro per cápita debe ser exactamente igual a la ampliación del capital, es decir que el crecimiento de capital per cápita es nulo. Eso significa que $k'(t) = 0$, y para ello deberá ocurrir:

$$\boxed{sf(k) = (n+d)k.} \qquad (9)$$

Aún cuando el estado estacionario significa un valor invariable para q y k, esto no significa que el crecimiento sea nulo, sino que hay un crecimiento positivo del producto a la tasa n. En efecto, si la fuerza laboral está creciendo a la tasa n, como el coeficiente capital / trabajo es constante, la tasa de crecimiento del capital ($\Delta K / K$) resulta igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral ($\Delta L / L$). Así, tanto L como K crecen a la tasa n, y el producto crece a la misma tasa n.

Las gráficas de Figura 1 permiten interpretar esos conceptos. En la primera se representan la función q (producción per cápita), la función $s\,q$ (ahorro per cápita), y la función lineal $(n+d)k$, suma de la ampliación de capital y la depreciación, del segundo miembro de (9). La segunda gráfica o curva de fase, representa la relación entre k' y k.

FIGURA 1



Siendo el ahorro per cápita $s\,q$ proporcional a q, donde el factor constante s está entre 0 y 1, la gráfica de $s\,q$ tiene la misma forma que la gráfica de q y se encuentra por debajo de ésta. El punto E de intersección de la misma con la recta, corresponde al valor de equilibrio k_e, que será el determinado por la condición (9). Esto caracteriza al estado estacionario, es decir con el capital per cápita k_e y el producto per cápita q_e, el ahorro per cápita compensa exactamente la ampliación del capital y la depreciación.

Cuando la economía está operando a la izquierda del punto E, la acumulación de capital per cápita crece, o sea $k' > 0$. A la derecha del punto E ocurre lo contrario, ya que el ahorro per cápita no es suficiente para producir una ampliación del capital, $k' > 0$, y en consecuencia k decrece.

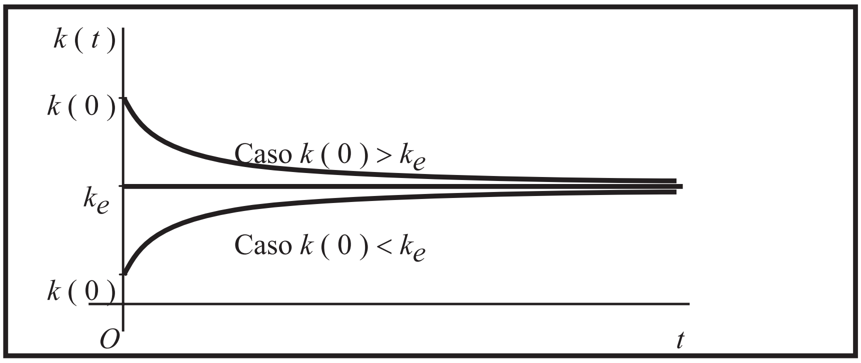
Este análisis del modelo lleva a la conclusión de que cada vez que la economía se aparta del estado estacionario, hay fuerzas que la empujan hacia el equilibrio del estado estacionario. Esta particularidad del modelo de Solow es sumamente importante y muestra no sólo que el estado estacionario es un punto en el cual q y k son invariables, sino también que la economía naturalmente tiende hacia el punto de equilibrio. En resumen, según sea la relación entre los valores $k(0)$ y k_e se presentarán tres casos:

1. $k(0) = k_e$: La trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita resultará constante en su nivel de equilibrio.
2. $k(0) > k_e$: La acumulación de capital per cápita $k(t)$ será decreciente, y su trayectoria temporal tenderá a su nivel de equilibrio k_e decreciendo.
3. $k(0) < k_e$: La acumulación de capital per cápita $k(t)$ será creciente, y su trayectoria temporal tenderá a su nivel de equilibrio k_e creciendo.

Las tres situaciones anteriores son representadas gráficamente en la Figura 2.

NOTA: Un sistema dinámico en el cual las variables tienden por naturaleza hacia un estado de equilibrio se conoce como un sistema estable, por lo que el modelo de crecimiento de Solow describe un proceso dinámico estable.

FIGURA 2



5. RESOLUCION DEL PROBLEMA MOTIVADOR

Utilizando el modelo de crecimiento de Solow, se pretende hallar la trayectoria temporal de la acumulación de capital per cápita k, y su valor de equilibrio a largo plazo.

La ecuación fundamental de la acumulación de capital en el modelo de Solow establece que:

$$k' = s f(k) - (n+d)k.$$

En este caso el producto per cápita es

$$f(k) = q = Q/L = K^{3/4} L^{1/4} / L = (K/L)^{3/4} = k^{3/4}.$$

Sustituyendo esta expresión de $f(k)$ y los valores numéricos de n, s y d en la ecuación se obtiene:

$$k' + 0{,}08\, k = 0{,}2\, k^{3/4}.$$

La solución de esta ecuación diferencial del tipo de Bernoulli está dada por:

$$\boxed{k(t) = (-0{,}264\, e^{-0{,}02\, t} + 2{,}5)^4}$$

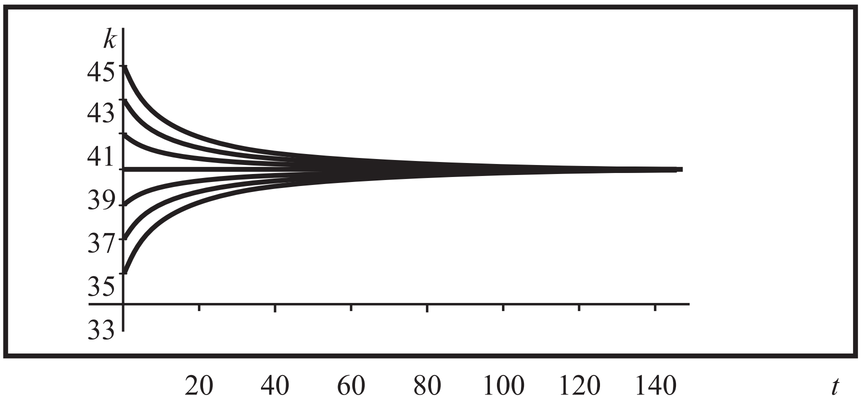
Confirmando lo deducido analíticamente, la expresión hallada pone en evidencia el comportamiento asintótico de la variable capital per cápita k tendiendo a su valor de equilibrio $k_e = 2{,}5^4 = 39{,}0625$ en forma creciente debido a que el valor inicial k_0 es menor que el valor de equilibrio.

6. RESOLUCION DEL PROBLEMA CON SOFTWARE

En esta etapa los alumnos, en grupos de dos o tres, proceden a resolver el problema motivador con el software Mathematica, o el software Derive. Por considerar innecesaria su inclusión detallada, la secuencia de instrucciones para resolver el problema es omitida en este trabajo.

La gran ventaja del uso de software para resolver ecuaciones diferenciales consiste en la posibilidad de obtener las soluciones de una misma ecuación, así como visualizar sus gráficas muy rápidamente, cuando se plantean distintas condiciones iniciales.

FIGURA 3



En el caso del problema motivador, al variar las condiciones iniciales, se logran fácilmente gráficas simultáneas de las distintas soluciones (Ver Figura 3). La experiencia indica que esta facilidad para representarlas, provoca entusiasmo en los alumnos, permitiéndoles comprender y relacionar el concepto matemático de familia de soluciones (o familia de "curvas solución") con la teoría macroeconómica.

7. CONSIDERACIONES FINALES Y CONCLUSIONES

El presente trabajo propone una alternativa a los métodos tradicionales de enseñanza de la matemática, especialmente apropiado para carreras que utilizan la matemática como herramienta instrumental. Si bien se ha realizado el mismo pensando en los alumnos de las distintas profesiones de las Ciencias Económicas (Economistas, Administradores de Empresas, Contadores, etc.), tiene plena validez para ser aplicado en otras disciplinas puesto que tanto el tema matemático (Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden), como el problema planteado (y su consecuente modelo económico), son sólo ejemplos que permiten desarrollar la metodología de trabajo en clases planteada.

La experiencia en el aula permite concluir que los alumnos que han participado activamente en el proceso de aprendizaje, relacionando los conceptos matemáticos con los económicos y utilizando un software que permita desviar la atención de la resolución hacia el análisis del problema, han presentado un mayor interés en los temas matemáticos y han profundizado los mismos con la finalidad de resolver problemas económicos más complejos relacionados con el problema motivador propuesto inicialmente.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Blanchard, P., Devaney, R., y Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales.* México: Thomson.

Blanchard, O. y Pérez, D. (2000). *Macroeconomía.* Buenos Aires, Argentina: Prentice-Hall.

Chiang, A. (1999). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. Madrid. España: McGraw Hill.

Dornbusch, R. y Fischer, S., (1991). *Macroeconomía.* España, Madrid. España.: McGraw Hill.

Edwards, C. y Penney, D. (2001). *Ecuaciones Diferenciales.* México.:Prentice-Hall Hispanoamericana S.A.

Samuelson, P. (2003). *Economía.* España, Madrid. España: McGraw Hill.

Simmons, G. (1993). *Ecuaciones Diferenciales.* 2da. Edición. España, Madrid. España: McGraw Hill.