UNA RED DE MODELOS Y LA CONSTRUCCIÓN DE LOS LOGARITMOS

Marcela Ferrari Escola, Rosa Maria Farfán Márquez
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
marcela_fe @yahoo.com.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: socioepistemología, covariación, logaritmos

Resumen
Presentamos en este reporte la red de modelos y las actividades matemáticas inherentes a ella que hemos establecido a partir de la hipótesis epistemológica reportada en Ferrari (2001) en cuanto a que evidenciar la covariación de un crecimiento aritmético y uno geométrico es un robusto eje de discusión para la construcción de los logaritmos.
En este trabajo, basándonos en los supuestos de la socioepistemología en cuanto a la construcción social del conocimiento y, desarrollando una ingeniería didáctica, buscamos evidenciar que, utilizar una herramienta distinta a la que escolarmente es promovida, permitirá generar significados más allá de aquellos logrados actualmente y que estos significados se fundamenten en los argumentos que permitieron la construcción de la función logaritmo.

Antecedentes

El presente reporte tiene como principal antecedente la tesis de maestría, *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo* (Ferrari, 2001) en la cual nos cuestionamos sobre los significados que deberían incorporarse a la enseñanza de los logaritmos con el objeto de subsanar la brecha entre sus dos presentaciones, la algorítmica y la analítica, fenómeno que llamáramos "dislexia".
En aquella oportunidad, influenciados por la escuela francesa, partimos del hecho, reportado por Trujillo (1995), que la noción logaritmo presenta en el discurso matemático escolar un tratamiento algorítmico rayando en lo axiomático, que inevitablemente deriva en una carencia de significados y un estancamiento en su aprendizaje que lo deja con estatus de proceso en el sentido de Dubinsky (1992), es decir, sin llegar a configurarse como objeto para la mayoría de los estudiantes.
Nuestra inquietud ahora es indagar qué elementos propiciaron que esta noción, los logaritmos, pasara de ser una poderosa e ingeniosa herramienta facilitadora de cálculos aritméticos, formulada en una sociedad interesada por expandir sus fronteras hacia el nuevo mundo, donde el poderío económico y el dominio de la astronomía y la navegación se tornan vitales para el desarrollo de la misma, a un importante objeto matemático con cabida en un riguroso sistema teórico. Nos preguntamos sobre qué prácticas sociales de antaño dieron pie a su desarrollo, cuáles rescatar y cuáles abandonar en el diseño de actividades escolares.
De trabajos como Trujillo (1995), Confrey y Smith (1995), Lezama (1999), de mi propia tesis de maestría (Ferrari, 2001) y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos lo cual nos lleva, de manera natural, a cuestionar modelos de difusión de conocimientos, concepciones, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey y Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de "función exponencial" y por ende, para la significación de los logaritmos.

Así mismo, Sierpinska (1992) cuestiona la presentación de las definiciones de los conceptos como su esencia cuando debería ser el objeto el que determina la definición, pues el abordaje de la funcionalidad de los logaritmos raya en lo axiomático, ya que no hemos encontrado, en el discurso matemático escolar, elementos que permitan el pasaje de lo aritmético a lo analítico en el tratamiento de este concepto.
En Ferrari (2001) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos, nos estamos refiriendo a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor", a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra" y por último ser la "respuesta de una integral singular" que se escapa de un patrón, sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.
Por otro lado, la revisión bibliográfica realizada, nos permite localizar una dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1992), supeditan la construcción del logaritmo al de función y aquellos que, como Confrey y Smith (1995), consideran pertinente problematizar sobre la estructura multiplicativa como forma de introducir la potenciación para de ahí pasar a los logaritmos, misma que subordina la construcción de la función logaritmo a la de función exponencial. Por nuestra parte, cuestionamos la idea que para "comprender" o "internalizar" la noción de una función específica, los logaritmos en este caso, debemos primero haber construido la noción de función, argumento en el que se percibe un desconocimiento de la naturaleza propia de cada función. A su vez, supeditarlos a la estructura multiplicativa conceptualiza a los logaritmos como entes aritméticos. Pensamos por tanto, que una revisión a profundidad de los elementos que podrían propiciar la construcción de la función logaritmo aportaría elementos a la problemática, tan extensa y exhaustivamente abordada en investigaciones de nuestra disciplina, respecto a la estabilización de la noción de función.
Efectivamente, manifestamos la dicotomía entre dos posturas: aquellos que, como Dubinsky (1992); Tall (1992); Vinner (1992); Sierpinska (1992), Carlson et al. (2002) entre otros, buscan un único mecanismo de apropiación de la noción de función, por tanto supeditan la construcción del logaritmo al de función; y, aquellos que, como Arrieta (2003); Martinez-Sierra (2005), Cantoral y Farfán (2004), Ferrari (2001) entre otros, reconocemos la importancia de dar cuenta de las características específicas, de "la otredad" (Arrieta, 2003) de las funciones.

Discurso matemático escolar actual

Al estudiar el discurso matemático escolar encontramos que varias son las herramientas matemáticas, que profesores y alumnos han desarrollado en su vida escolar, respecto a los logaritmos, que evidencian la compleja apropiación de esta noción. Si preguntáramos a algunos docentes, que imparten el curso de Álgebra en el Bachillerato, sobre sus experiencias en torno a la enseñanza de los logaritmos, escucharíamos que es una noción difícil para los alumnos; que debido a que Álgebra, en sí, es compleja y su programa extenso, demanda más tiempo para transmitir las nociones que conlleva este curso, prefiriendo ahondar en ideas previas al logaritmo. Rara vez logran abordar la enseñanza de los logaritmos pues, en general, son el último tema del programa y una de las nociones que se evita.

Si iniciamos nuestra experiencia desde los recuerdos que, como estudiantes, han guardado respecto a su acercamiento a los logaritmos hallamos que cuando, cómo y con qué se les presentaron los logaritmos en la escuela dio pie a analizar la evolución del papel del profesor, de los recursos didácticos que se utilizan en clase y de los programas. Para lograrlo, formamos tres grupos de discusión con profesores de distintos niveles en Hidalgo, Nayarit y Chiapas, quienes gentilmente se prestaron a compartir sus experiencias como estudiantes y profesores.

Efectivamente, desde la nostalgia de las tablas de logaritmos… *mmm… las tablas de Arquímedes Caballero*[*], que son mencionadas y utilizadas hasta hoy en día por los "veteranos" de la enseñanza de los logaritmos, o desde la idea de que, en los más jóvenes, era una tecla de la calculadora que algunos teníamos, nadie dejo de recordar algo de su pasaje por los logaritmos. Tampoco faltó aquél que recordara la regla de cálculo, sobre todo, aquellos que tuvieron una formación ingenieril, y que desarrollaron una destreza para calcular operaciones recorriendo dos reglas graduadas con escala logarítmica.

Los recuerdos sobre: la falta de conexión con la realidad o con otras disciplinas; la forma "abstracta" con la que era presentada; el cultivo de la idea de que ya "era algo escrito que sólo tiene aplicaciones aritméticas", entre otros comentarios, presentes en la discusión escolar de esta noción, no dista mucho de la problemática que enfrentan nuestros alumnos en sus "escasas" clases sobre función logarítmica.

Si reflexionamos con los profesores sobre los cursos, temas y actividades que se relacionan con la vida escolar de los logaritmos, nos reducimos a un pequeño ámbito, el de las matemáticas y, en particular, en álgebra para aquellos que incursionaron en el uso de las tablas logarítmicas como el único medio de realizar ciertas multiplicaciones y por ende, bajo una visión aritmética. En tanto que, aquellos profesores que eran estudiantes de los 80' en adelante, se acercan a ideas funcionales de los logaritmos al hablar de ellos, ya que se refieren a cursos de Cálculo, diferenciales e integrales, donde su pasaje tradicional por álgebra, primer contacto con los logaritmos, no es mencionado.

Este mundo especial, donde confluyen recuerdos y realidades, nos permitió observar la persistencia de las maneras de abordar esta noción matemática en el aula. La invariabilidad que la envuelve, que se respeta sin conflicto, sin preguntas. Es así, que los cuestionamientos de los muchachos siguen siendo los mismos y la evasión a sus respuestas de la mayoría de nosotros también.

Si le preguntáramos a los docentes que imparten los logaritmos "¿qué cosa no quisieran que les preguntaran sus alumnos?" responderían en general, ¿de donde vienen? ¿Por qué funcionan? ¡Explíqueme!, ya que reconocen su desconocimiento de la naturaleza de los logaritmos y de argumentos que pudieran utilizar en la discusión de este concepto matemático. Esta historia se repite en el nivel superior. Es efímero el tiempo utilizado para definir los logaritmos, en general como función inversa de la función exponencial, y trabajar con ellos para construir un robusto modelo de los logaritmos.

Encontramos así, cierta ambivalencia entre aquellos que presentan y transmiten los logaritmos en sus clases de matemáticas y "contemplan" su complejidad; y, aquellos que los "usan" visualizando una herramienta importante.

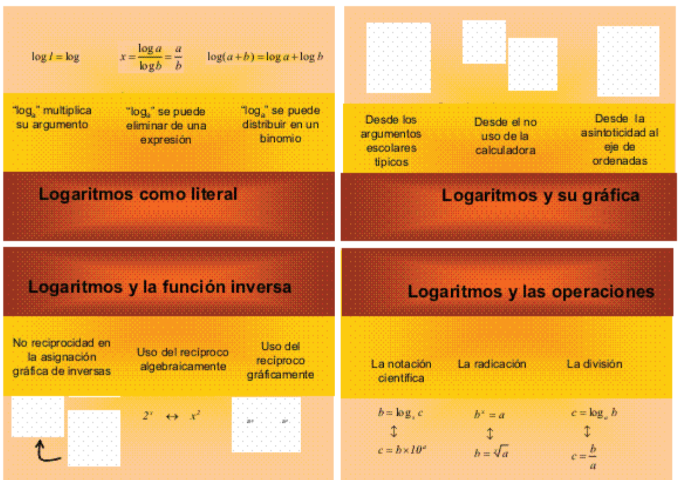
Por un lado, intentamos reflejar la problemática observada en el manejo de los logaritmos en aquellos alumnos que habían transitado el peregrinaje escolar propuesto para el aprendizaje de

[*] Arquímedes Caballero (1918-2004), profesor de matemáticas quien dedicó su vida a la docencia aportando al sistema educativo del país, varios libros como Geometría Analítica y diversos textos escolares, entre ellos las Tablas Matemáticas empleadas por muchas generaciones de estudiantes de educación secundaria

esta noción. Particularmente deseábamos recabar información sobre los argumentos y herramientas que los alumnos utilizaran al enfrentarse a la necesidad de echar mano de estas nociones.

En la mayoría de los estudiantes, encontramos las frases "no lo recuerdo", "nunca lo vimos en la escuela", ante tareas que explícitamente mencionábamos a los logaritmos. En aquellas actividades en las que era necesario utilizarlos, recurrían a herramientas más conocidas, tales como, las tablas, la ley de distribución, la linealidad, la multiplicación entre literales, la división como argumento de explicación, la reciprocidad. Observamos que las herramientas utilizadas por los estudiantes, reflejan la ausencia de la apropiación de los logaritmos a partir de las actividades que generalmente propone el discurso matemático escolar imperante en las aulas de hoy. Es fugaz la aparición de los logaritmos en las curricula escolares y, más aun lo son, las actividades propuestas a los alumnos que requieran su uso y exploración.

Es necesario además, considerar que existe una gran variedad de herramientas que utilizan los alumnos, aquellas a las que recurren para resolver ciertas actividades y que podríamos incorporarlas en las secuencias dándoles otro enfoque y propiciar un avance en el aprendizaje de las matemáticas en torno a los logaritmos.



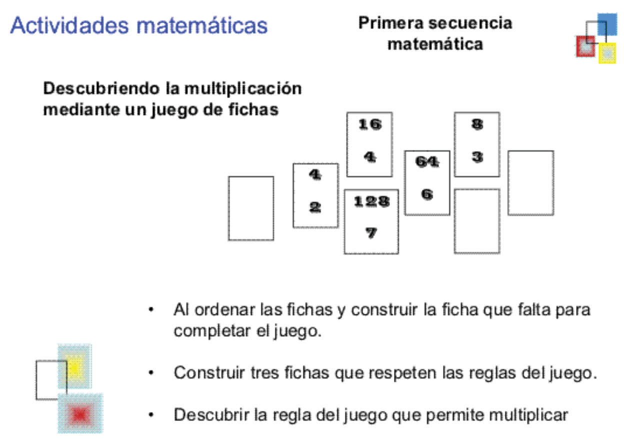
Si reunimos las herramientas que se privilegian, se observa de una manera interesante el arraigo a nociones que se han trabajado con mayor intensidad. Una de las más recurrentes herramientas matemáticas utilizada es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, lo cual evidencia la aplicación de la linealidad en toda circunstancia, lo que Artigue (1990) llamara *linealidad abusiva*, y la cual no sólo se remite a los logaritmos, sino a toda función involucrada con una suma en su argumento. Esto coloca a los logaritmos como "una partícula log que multiplica todo lo que se le pone adelante", es decir, no se ha desarrollado la idea de argumento funcional, quedando así en un acercamiento operatorio.

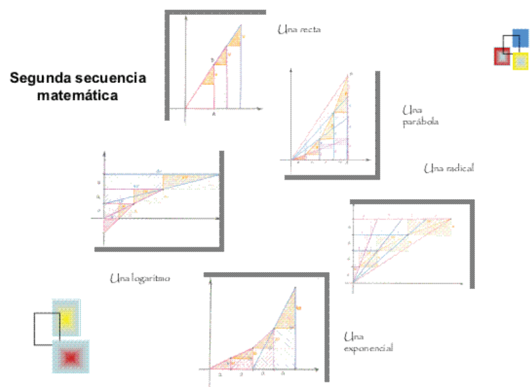
Otro rubro interesante para analizar es el uso de la graficación. Nos preguntamos ¿qué argumentos proponen para explicarse el comportamiento de una función, y en particular la logaritmo? Prevalece en sus respuestas la idea de que se requiere de una tabla para esbozar una función, resabio de los acercamientos propuestos en la mayoría de los textos utilizados en clase, así como la no apropiación de la función inversa, elemento importante en la vida de los logaritmos y que en el discurso matemático escolar se los toma como un buen ejemplo de esta noción. La mayoría de los textos discuten la función inversa desde la simetría geométrica de las funciones respecto a la recta $y = x$, siendo extendida en la mayoría de los alumnos a otros tipos de simetrías como la que nos invita a recordarla ante la función recíproca. Estas confusiones tienen su lógica quizás en los distintos sentidos que adoptan las palabras "inversa" y "recíproca" dentro y fuera de las matemáticas.

Es basto e interesante entonces, el análisis de las producciones de los alumnos ante cierto tipo de preguntas y actividades que involucran a los logaritmos y que no se agota en esta primera revisión de ellos.

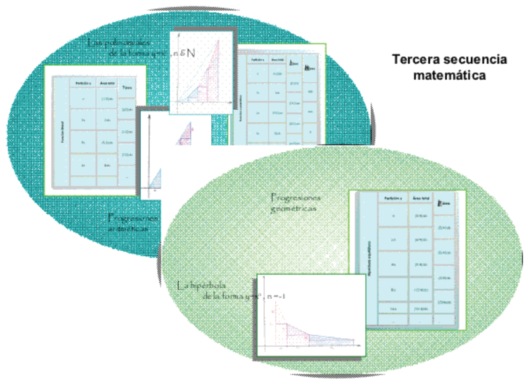
La red de modelos

En Ferrari (2001) se presentaban tres momentos de la construcción de los logaritmos que fueron denominados: Los logaritmos: como *transformación numérica*; como *modelizadores*; y como *objeto teórico*. Estas tres etapas son las que proponemos transitar para apoyar la apropiación de los logaritmos desde la discusión de nuevos argumentos y su consenso, generados desde una red de modelos.





Es así, que presentamos en primer lugar, el modelo numérico, la actividad matemática generada bajo los supuestos del primer momento de los logaritmos. Esta actividad se basa fundamentalmente en manipular fichas semejantes a la de un dominó, que acercaría a los participantes a percibir las propiedades logarítmicas. En segundo lugar, abordamos el modelo geométrico, segundo momento, donde la semejanza de triángulos se convierte en el lenguaje de construcción de la gráfica logarítmica potenciando la percepción de sus características. Por último, discutiremos el modelo algebraico que involucra la definición más estructural de los logaritmos desde el cálculo de áreas bajo curvas.



Referencias bibliográficas

Agnesi, M. (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana.* Libro Secondo del Calcolo Differenziale (2 tomos). Milano, Italia: Nella Regia Ducal Corte..

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

Artigue, M. (1990). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10*(2-3), 241-286.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Aplying covariational reasoning while modelling dynamic events: A framework and study. *Journal for Research in Mathematics Education 23*(5), 352-378.

Confrey, J. y Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education* 26(1), 66-86.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 85-106). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Hernández, M & Ferrari, M. (2005). Los logaritmos a partir de la covariación de sucesiones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. México.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de Maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN), México.

López, R. & Ferrari, M. (2005). La función logaritmo bajo la perspectiva de la construcción dada por Agnesi (1748). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* México.

Martínez-Sierra, G. (2005) Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento *Revista Latinoamericana de Investigación en matemática educativa 8*(2),195-218.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 25-58). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Function, limits, infinity, and proof. En: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp.495-511). New York: MacMillan Publishing Company.

Trujillo, R. (1995). *Problemática de la enseñanza de los logaritmos en el nivel medio superior. Un enfoque sistémico*. Tesis de maestría no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN). México.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En: E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp.195-213). EE. UU.: Mathematical Association of America. Volumen 25.