EL USO DE LAS GRÁFICAS EN LA CONFRONTACION ENTRE LA CONTINUIDAD EULERIANA Y LA ESTABILIDAD DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN[†]

Fidel Morales Couoh; Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. (México), Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
fmorales@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: práctica social, uso de las gráficas, ecuaciones diferenciales, estabilidad

Resumen
En este escrito reportamos los avances de la investigación sobre el *uso de las gráficas* en los libros de texto de las ecuaciones diferenciales focalizado a las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, con base en la aproximación socioepistemológica. Este marco nos ha ayudado a precisar el papel del *uso de las gráficas* ante una situación específica, donde la gráfica no es considerada como una representación "estricta" del concepto de función, sino por el contrario es la modelación de un comportamiento tendencial en una situación específica. De esta manera discutimos el uso de la gráfica en el sistema didáctico.

Introducción

La Matemática Educativa como disciplina, es la ciencia que estudia los fenómenos que suceden cuando un saber que nace en ambientes no escolares ingresan al sistema escolar. Con base en lo anterior, se ha logrado reconocer una permanente confrontación entre la obra matemática y el discurso matemático escolar, ya que la construcción de la primera son referidas a objetos explícitos propios de su actividad (matemática), mientras para el segundo apunta hacia categorías implícitos propias de la actividad humana. El no saber distinguir entre estas dos construcciones lleva a planteamientos ingenuos de la problemática de enseñanza y aprendizaje, como aquellos de escribir textos de matemáticas con base a secuenciaciones lógicas de conceptos.

Este hecho lleva a concebir que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es el "aprender" un listado de formulas y métodos, favoreciendo un estatus utilitario de la matemática y no como un conocimiento (matemático) que transforme al individuo mismo y su realidad. De esta manera, la enseñanza de la matemática en la educación superior aun no ha logrado hacer de la matemática un conocimiento funcional, debido a que los modelos empleados por la educación matemática han estado fuertemente anclados en los conceptos, situación que se limita a la construcción del objeto y no 'aquello" (la *práctica social*) que obliga a construirlo (Cordero, en prensa).

Ante el planteamiento anterior nuestra investigación considera como problemática que los marcos de referencia para que se resignifiquen las gráficas están ausentes en el propio discurso matemático escolar (Cordero, en prensa). Por ello la necesidad de considerar la aproximación Socioepistemológica, ya que considera a las prácticas sociales como la fuente generadora de conocimiento.

[†] Esta investigación forma parte del proyecto CONACYT, No. 47045: *Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior*

Antecedentes

Trabajos con base en la aproximación socioepistemológica han reportado que la gráfica puede tomar un estatus argumentativo en el cálculo al no ser considerada como “la representación estricta del concepto de función”, comúnmente referida en los libros de texto y por ende los profesores y los alumnos (Hernández, 2004; Rosado, 2004). Por ello Hernández (2004), reporta las construcciones de los estudiantes a la luz del comportamiento tendencial, entre la función y su derivada. En tales construcciones las gráficas pasan a ser argumentos para resignificar las relaciones, mediante la variación de parámetros por ejemplo: si $Y = Af$, entonces $Y' = Af'$, ésta variación deja a un lado la importancia de la variable “x” y pasa a ser importante el coeficiente A.

Así mismo, trabajos sobre los *usos de las gráficas* han reportado que las gráficas en los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaría) pasan por diferentes funcionamientos y formas desde el uso de la hoja de papel en los niveles educativos básicos, para establecer orientaciones y simetrías, el uso de las cuadrículas para establecer trayectorias y reproducirlas (Flores, 2005). Mientras que en los texto del nivel medio superior (bachillerato) se identifica el universo de gráficas por las que transita el estudiante, donde los usos de las gráficas van desde la distribución de puntos hasta el uso para el calculo de áreas y volúmenes, tales usos se resignifican al debatir entre sus funcionamientos y sus formas (Cen, 2006). Entendiendo por resignificación la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano normado por lo institucional, o sea, será el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su funcionamiento y forma de acorde con lo que organizan los participantes (Cordero, en prensa).

Considerando estos hechos, en nuestra investigación la graficación será estudiada como *práctica social*, de esta manera se estudiara el *uso de las gráficas* en tanto su funcionamiento y su forma en *ecuaciones diferenciales* de segundo orden con coeficiente constante $ay''(x) + by('x) + cy(x) = F(x)$ con $y(0) = A$, $y(0) = B$ y $F(x)$ continua a trozos, ya que el desarrollo de prácticas de graficación abren paso a una matemática funcional, ofreciendo indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla (Cordero, en prensa). De esta manera el uso de la gráfica dependerá de una situación específica por lo que tiene sentido formular, en nuestro caso, que las gráficas tienen una función orgánica (funcionamiento) en la situación siendo expresada de alguna forma (gráfica) los cuales se confrontan, ya que dependen de la situación.

PROBLEMÁTICA

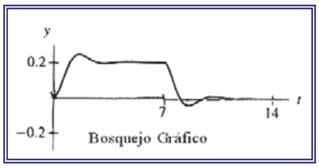
La ausencia de marcos referencia para resignificar las *ecuaciones diferenciales* de segundo orden de coeficiente constante $ay''(x) + by('x) + cy(x) = F(x)$ con $y(0) = A$, $y(0) = B$ y $F(x)$ continua a trozos como un modelo de *estabilidad*, están ausentes en el discurso matemático escolar. De esta manera nuestro trabajo de investigación será encontrar aquellos marcos de referencia que permita desarrollar la práctica de graficación en el sistema educativo.

Lo anterior surge como resultado de la reflexión ante el siguiente cuestionamiento, planteado tanto a alumnos como a profesores:

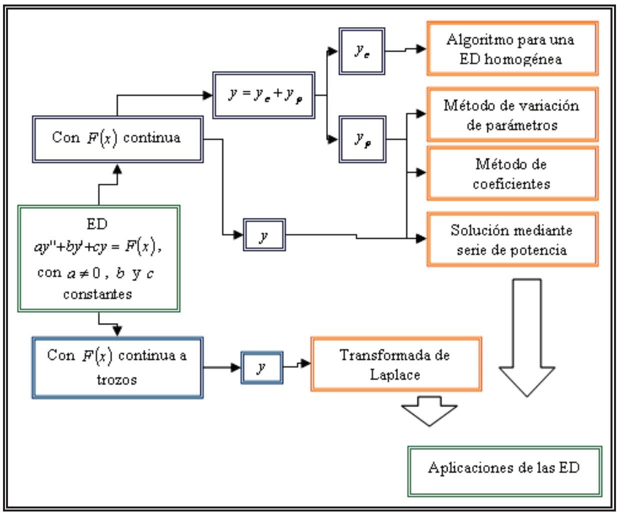
Dada la ecuación diferencial (cuadro de la izquierda) con $y(0)=y'(0)=0$,

$$y''(t)+2y'(t)+5y(t)=\begin{cases}1 & 0\le x<7\\ 0 & x\ge 7\end{cases}$$

anticipar la solución a partir de la ecuación misma o bien, conocer un bosquejo gráfico de la solución sin tener explícitamente la solución respectiva.



La mayoría de los participantes no pudieron dar una respuesta sin antes recurrir a resolver “algebraicamente” la ecuación diferencial, mediante métodos y algoritmos. Llevándonos a precisar dos alternativas de resolución (véase cuadro 1). La primera consiste en resolver la ecuación diferencial en cada uno de los intervalos y luego, encontrar una solución de modo que $y(x)$ y $y'(x)$ sean continuas en los puntos de discontinuidad como sugieren Zill, (2006) y Boyce & Diprima, (1992). Mientras que la segundo es mediante la aplicación de la transformada de Laplace como menciona Blanchard et al, (1999), Boyce & Diprima, (1983) y Zill, 2006).



Cuadro 1.- Métodos para resolver una ecuación diferencial

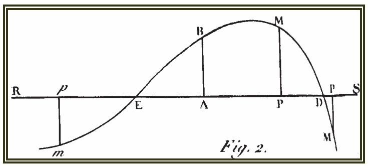
Así mismo pudimos constatar que el uso de las gráficas consiste en tratarla como la representación del concepto de función, como resultado del modelo de conocimiento que vive en la educación (superior), estructura compuesta de definiciones, una colección de problemas a manera de ejemplos y un listado de ejercicios propuestos, comúnmente llamado “aplicaciones”. Este hecho lleva, tanto a alumnos como a profesores, a consideran que lo verdaderamente importante en el curso de matemáticas es “aprender” ése listado de formulas y métodos, que en el mejor de los casos, ayuda al alumno a adquirir habilidades, así como a favorecer un pensamiento utilitario, quizá por ello las “aplicaciones”. Esto limita al estudiante a no apreciar a la ecuación diferencial $ay''(x)+by(\acute{}x)+cy(x)=F(x)$ como un modelo de *estabilidad* donde la solución $y(x)$ tiende a comportarse como $F(x)$ bajo ciertas condiciones determinados por los coeficientes.

Esta manera inercial de proceder en los participantes al referirse a $F(x)$, quizás se deba a la corriente formalista del siglo XVIII, encabezada por Euler quien toma a las funciones como aquellas que pueden ser expresadas por una sola expresión. Tal concepción analítica la presenta en el primer volumen en su "*Introduction a L'analyse infinitésimale*" publicado en 1748, la cual define:

> *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta como quiera que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes…*
>
> (Euler, 1748a)

En su segundo volumen hace una distinción entre líneas curvas continuas y curvas discontinuas o mixtas:

> *…Una línea curva continua es aquella cuya naturaleza se expresa por una sola función determinada por x. Pero, si una línea curva está compuesta de diferentes porciones BM, MD, DM, etc., determinadas por varias funciones de x, de modo que siendo una parte BM el resultado de una función, otra parte MD sea el de una segunda función, etc., (Véase cuadro 2) llamamos a esta clase de líneas curvas discontinuas, o mixtas e irregulares, por que no están formadas según una sola ley constante y están compuestas de porciones de diferentes curvas continuas…*
>
> (Euler, 1748b)



Cuadro 2

Esta limitada idea sobre funciones impide dar una representación adecuada a las curvas que pudieran surgir ante un problema físico, de manera que se habrá de diseñar una situación donde se confronte la continuidad Euleriana y la *estabilidad* de las *ecuaciones diferenciales* en cuestión. Por ello, la situación deberá dar sentido y significado a este tipo de gráficas (véase cuadro 3) pasando a un estatus argumentativo.

Ante el planteamiento anterior la instrumentación de la tecnología (sensor de sonido) será el mediador para la toma de datos ante la situación masa-resorte-amortiguamiento. De esta manera el uso de la gráfica (en esa situación) será el establecer el comportamiento del movimiento de la masa atada al resorte. Es así que para poder inferir sobre un tipo de comportamiento de cierto tipo (véase Figura 4) con respecto a otro (véase Figura 3) se tendrá que hacer ajustes y las modificaciones necesarias al sistema. Todo ello como resultado del comportamiento tendencial de la gráfica al variar las componentes del sistema.

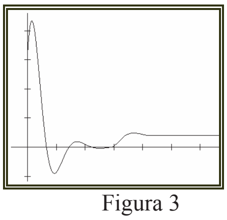


Figura 3

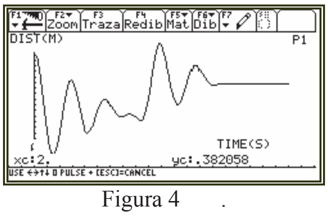


Figura 4

Pensemos en el siguiente ejemplo:

Considere una masa unida a un resorte y se desliza sobre una mesa. Supongamos que en el tiempo $t=0$ la masa se mantiene en reposo (véase Figura A). Cuando $t<8.5$, la mesa se inclina de manera que la gravedad proporciona una fuerza unitaria que alarga el resorte (véase Figura B). En el tiempo $t=8.5$, la mesa vuelve a nivelarse (véase Figura C). Con ayuda del sensor obtenemos la gráfica de la Figura 4.

Figura A

Figura B

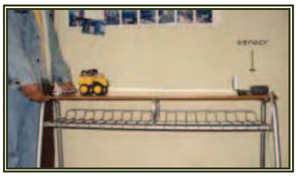
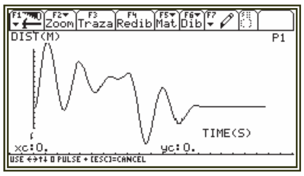


Figura C .

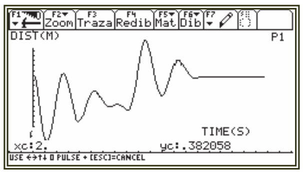
Expresado en términos matemáticos sería:

$$ay''(x)+by('x)+cy(x)=\begin{cases}1 & 0<x<8.5\\ 0 & x\geq 8.5\end{cases} \quad \text{con } y(0)=y'(0)=0.$$

Sin embargo, de acuerdo a la posición del sensor, la tendencia de la gráfica obtenida no

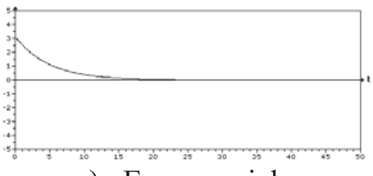


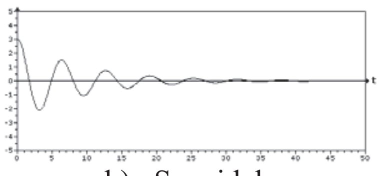
corresponde (sigue) a la $F(x)$ (véase figura de la izquierda), por tanto se habrá de inferir en la posición del sensor de tal suerte que se obtenga la figura de la derecha. Así mismo, se



habrá de identificar que el comportamiento de la curva depende de dos momentos (posición de la mesa).

Por otro lado, la modificaciones al sistema se lograran con ayuda de un Software, el cual permite manipular los coeficientes (componentes del sistema) de la ecuación diferencial cuando $F(x)=0$. Donde al variar cada uno de los coeficientes se identificara dos tipos de gráficas de movimiento: la de tipo exponencial y la de tipo senoidal (véase figura1. a) y b) respectivamente).


a) Exponencial


b) Senoidal .

Por ejemplo, consideremos la masa y el amortiguamiento igual a la unidad (coeficientes $a=1$ y $b=1$ de la ecuación diferencial). Si con base a una gráfica (Figura 6) podemos inferir sobre las características del resorte para generar ciertos comportamientos, como los que se muestran en la Figura 5 y Figura 7.

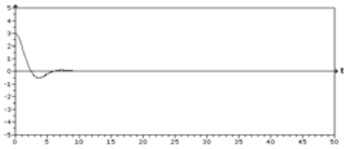


Figura 5

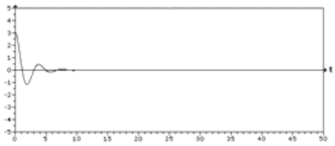


Figura 6

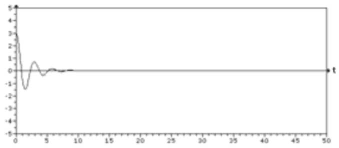


Figura 7

Consideraciones finales

El uso de las gráficas significa que la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación. El estatus epistemológico del uso de la gráfica puede ser ubicado, con cierta factibilidad, como un producto material continuo. La argumentación gráfica en las diversas situaciones de uso permitirá el continuo. Para que el conocimiento no se destruya se requiere lograr un estatus cultural de la argumentación gráfica. De aquí la conveniencia de pensar a la graficación como una *práctica social* tarea que tendremos saber desarrollar en el sistema educativo. Para ello, hemos logrado ubicar a la argumentación gráfica en una situación de modelación donde los comportamientos de las figuras geométricas, curvas, gráficas y funciones son resignificados generando procedimientos de variación de parámetros y construyendo procesos y objetos de instrucciones que organizan comportamientos.

Referencias Bibliográficas

Boyce, W. y Diprima, R. (1992). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Ed. Limusa, 3ª Edición, México.

Blanchard, P; Devaney, R & Hall, G. (1999). *Ecuaciones Diferenciales*. Ed. Thomson, 2ª Edición, México.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2005). Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Proyecto financiado por CONACYT, clave: No. 47045.

Cordero, F. (en prensa). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano. Reverté Ediciones-Clame A. C. 2005.

Euler L. (1748). *Introduction a l'analyse infinitesimale*. Tomo I y II. Trad. Labey, edición de 1835, París.

Flores, R. (2005). *El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto*. Tesis de Maestría no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN.

Hernández, D. (2004). *Las argumentaciones gráficas de los estudiantes en las relaciones de f y f' para las funciones x, x^2 y x^3*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Zill, D. (2006). *Ecuaciones Diferenciales con Aflicciones de Frontera*. Octava Edición, Thomson. México.