EL USO DE LAS GRÁFICAS EN LA MECÁNICA DE FLUIDOS. EL CASO DE LA DERIVADA[††]

Teresa Guadalupe Parra Fuentes y Francisco Cordero Osorio
Cinvestav-IPN. (México) y Universidad Católica de Valparaíso. (Chile)
tparra@cinvestav.mx, fcordero@cinvestav.mx
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, graficación, resignificación, derivada

Resumen
En este escrito se reportan los avances de nuestra investigación que tiene como objetivo crear un marco de referencia en el cual se resignifique la derivada, en un dominio diferente al de la matemática misma. Particularmente queremos dar cuenta de la relación que existe entre el dominio matemático y el de la ingeniería. Se considera a la graficación como el argumento que permita al estudiante resignificar la derivada en el marco de la socioepistemología, el cual centra la atención hacia los usos del conocimiento en situaciones específicas.

Problemática

El conocimiento matemático que se enseña en la escuela no logra hacerse un conocimiento funcional en los estudiantes, es decir, no logra transformar su realidad y al estudiante mismo. Constantemente escuchamos a los estudiantes preguntándose para qué les sirve aprender matemáticas. Para ellos lo más importante es que ésta satisfaga las necesidades de su vida diaria, llevando de esta forma al conocimiento a un nivel utilitario. Y es de esperarse ya que el estudiante no le encuentra sentido ni significado a la matemática que se le enseña a través de algoritmos y secuenciaciones. Lo cual es resultado de que el discurso matemático escolar está fuertemente anclado a los conceptos. De alguna manera tal discurso presenta al conocimiento como preexistente a la experiencia del ser humano, esto es, presenta a la matemática como un producto material acabado que siempre ha existido, por lo que sólo debemos tomarlo y aprenderlo, haciendo a un lado la esencia de esa matemática a las situaciones que le dan sentido. Soslaya el desarrollo y diferentes resignificaciones que ha tenido a través del tiempo: a lo que la ha llevado a ser como es y no de otra forma, esto es, a las prácticas sociales que norman el conocimiento, de tal manera que éste se incorpora al individuo transformando su realidad. Desde esta perspectiva podemos ver que hay ausencia de situaciones que le permitan al estudiante usar su conocimiento, que a través de su experiencia construya argumentos para dar sentido a sus procedimientos y de esta forma construir un conocimiento que no esté basado en la memorización sino en su práctica.

Un ejemplo de las consecuencias que el discurso matemático escolar ha generado en los estudiantes es el caso de la derivada, a la cual el estudiante no le incorpora mayor significado que "la pendiente de la recta tangente a una curva" la cual no se resignifica y algunas veces es el "obstáculo" para que se resignifique (Rosado, 2004). Además se ha encontrado en algunos casos, que aún los estudiantes de ingeniería siguen teniendo dificultades con el concepto de pendiente (Mirón, 2000). Así, investigaciones como éstas hacen notar que lo que se enseña a los estudiantes no los transforma sino que por el contrario se les mete en un sendero de dificultades. Aspectos variacionales que son fundamentales en la esencia de la derivada no forman parte de los significados que el estudiante pudiera incorporarle. Esto ocurre por la

[††] Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Estudio de las gráficas de las funciones como prácticas institucionales. Una gestión escolar para el Nivel Superior. Clave: No. 47045.

ausencia de marcos de referencia que permitan que el estudiante resignifique la derivada, ausencia de situaciones que centren la atención en la noción de variación. La cual nos rodea cotidianamente a través del movimiento y que el discurso matemático escolar nos presenta a través de fórmulas. Cabe señalar lo que en la perspectiva socioepistemológica entendemos por resignificación que es el uso del conocimiento en una situación específica.

Uso de las Gráficas

La tesis socioepistemológica considera a las prácticas sociales como las generadoras del conocimiento, cuya función consiste en permitir que un conocimiento sea como es y no de otra forma. Por lo que no nos referimos a cualquier práctica sino a aquéllas que hacen que el humano haga uso de su conocimiento ante una situación transformando su realidad y a él mismo. De esta manera, al referirnos a usos tenemos que hacer referencia a que hay un *funcionamiento* y una *forma* del conocimiento en cuestión en una situación específica. Este mismo modelo lo podemos ver reflejado al considerar a la graficación como una práctica social, bajo la cual hablamos de usos de la gráfica a través de su funcionamiento y forma, que dependerán de una situación específica. Un ejemplo de esto lo podemos ver en el trabajo de Cen (2006), el cual consistió en clasificar los diferentes usos de las gráficas en el nivel bachillerato: da cuenta del desarrollo de la gráfica de la función que se resignifica al debatir entre sus *funcionamientos y formas*, haciendo significativo el papel del uso de las gráficas ante situaciones específicas, contraponiéndose a la idea de gráfica como una representación del concepto de función. Cordero (2005a), menciona que el estudio de usos y desarrollo de prácticas de la graficación nos acerca más a la matemática funcional, puesto que nos ofrece indicadores para que el conocimiento se integre y se resignifique permanentemente a la vida para transformarla. En este sentido la graficación puede llevar a cabo múltiples realizaciones y hacer ajustes en su estructura para producir un patrón o generalización deseable, para crearle un medio que soporte el desarrollo del razonamiento y de la argumentación, generando prácticas retóricas y argumentativas gráficas (Cordero, (2005b)). Entre los trabajos que dan cuenta de esta tesis por medio de sus resultados de investigación se encuentran los de Campos (2003), Domínguez (2003) y Rosado (2004).

Cantoral y Farfán (2003) mencionan que la matemática del nivel superior está al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia en donde adquiere sentido y significación. Sin embargo parecería que no hay tal relación entre la matemática y otros dominios, ya que el estudiante no logra darse cuenta que es la misma matemática que ha aprendido la que se va desarrollando al paso de su vivencia institucional, adquiriendo sentido y significado. Es decir, son los usos que van evolucionando y por lo tanto también los funcionamientos y formas del conocimiento.

Con todo lo anterior nuestro trabajo consiste en crear un marco de referencia en el cual se resignifique la derivada en la materia de Mecánica de Fluidos, específicamente en el tema de Conservación de la Masa. La cual consiste de un fluido en movimiento que fluye a través de un volumen de control, esto es, un volumen arbitrario en el espacio por el cual entra y sale fluido. La conservación de la masa establece que la cantidad de masa que entra a un volumen de control es la misma que debe de salir de él.

Es decir que $\frac{dM}{dt} = 0$, estableciendo algunas advertencias:

- Si durante un intervalo de tiempo la cantidad de masa que fluye hacia el volumen de control no es la misma que la que sale de él, deberá existir un cambio en la cantidad de masa dentro del volumen de control.
- Si el flujo que sale es mayor que el flujo que entra, deberá tenerse una disminución en la cantidad de masa dentro de volumen de control.
- Por el contrario, se tendrá un aumento en esta masa si el flujo que entra es mayor que el que sale.

Basándose en los conceptos físicos se puede establecer en palabras la conservación de la masa, como:

$$0 = \begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que sale del} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que entra al} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{rapidez de cambio} \\ \text{de la masa dentro} \\ \text{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

Lo cual podemos reescribir como

$$\begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que sale del} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{gasto másico} \\ \text{que entra al} \\ \text{volumen de control} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \text{rapidez de cambio} \\ \text{de la masa dentro} \\ \text{del volumen de control} \end{bmatrix}$$

Por otro lado el discurso matemático escolar ha privilegiado la derivada en el sentido de Cauchy, esto es, como el límite del cociente incremental. Que es representado como un proceso al límite de una familia de rectas secantes, sin embargo esto ha sido localizado como una gran dificultad didáctica como reporta Dolores (1989). Peor aún, se ha encontrado que los estudiantes de ingeniería siguen, como aquellos reportados en educación básica, sin asumir plenamente al objeto "pendiente de una recta" como una entidad, una totalidad que describe una propiedad de las rectas. En consecuencia la noción de derivada, cuyo tratamiento escolar se apoya en aquella de pendiente deviene frágil entre los estudiantes. García (1998) reporta la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes de diferentes edades para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Lo cual no es difícil de verificar ya que los estudiantes no incorporan significado variacional a la derivada. Con base a estas dificultades encontradas es que en nuestro trabajo consideraremos la derivada en el sentido de Lagrange, teniendo como hipótesis de investigación que sería más natural para el estudiante resignificar la derivada en este sentido. Además de que permite que el estudiante desarrolle la noción de variación. Al referirnos a la derivada en el sentido de Lagrange, nos referimos a la parte lineal del desarrollo de series de potencias de una función en torno a un punto dado.
Esto es,

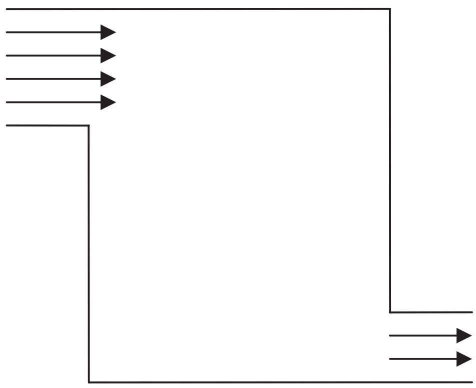
$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$$

En este sentido la derivada es el coeficiente de *h* que resulta de la diferencia entre dos estados, *f(x+h) y f(x):*

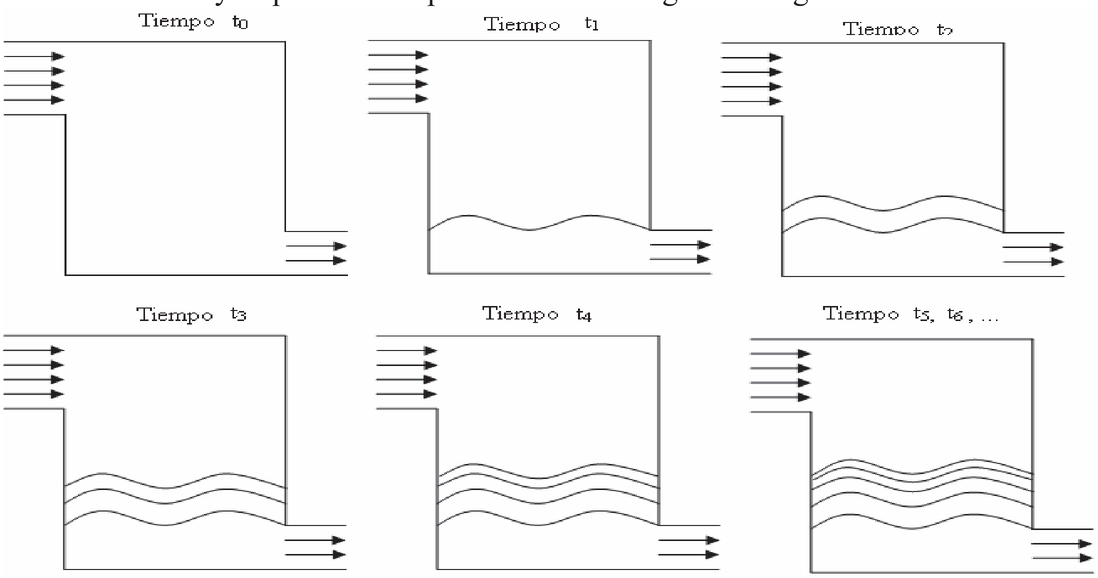
$$f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h$$

Un estado inicial $f(x)$ y un estado final $f(x+h)$, que al ser resignificado en la conservación de la masa, $f(x)$ será la cantidad de entrada y $f(x+h)$ la cantidad de salida por lo que la diferencia de estas será la acumulación $f'(x)h$. Que de manera global nos da como resultado la variación de la acumulación del fluido en el volumen de control.

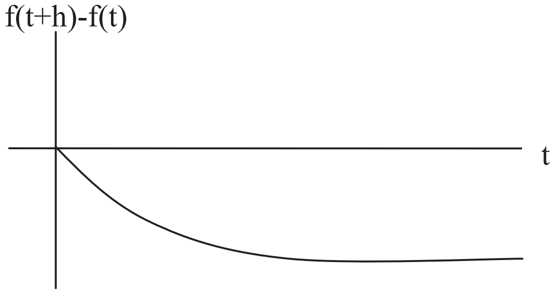
Para llevar a cabo estas ideas, estamos diseñando una secuencia didáctica que será puesta en escena con estudiantes de ingeniería. La cual consistirá en presentar al estudiante la siguiente figura que representa un volumen de control. Cuya característica principal es que la dimensión de la entrada es mayor que la de salida.



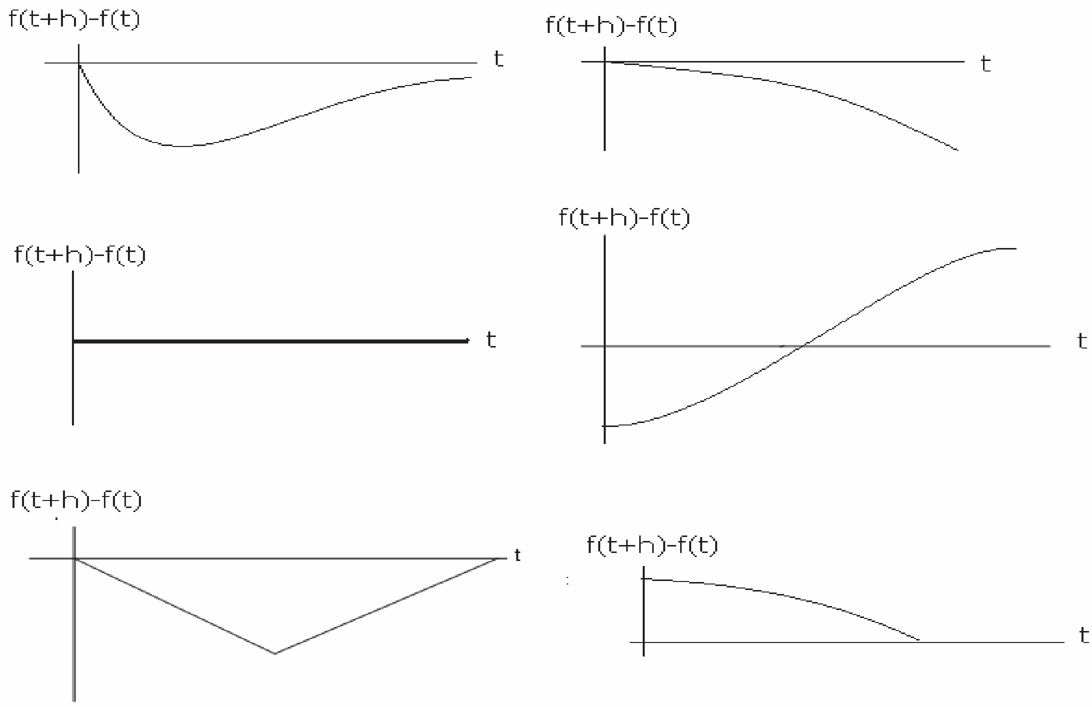
La cantidad de entrada en un tiempo t la llamaremos $f(t)$ y la cantidad de salida en un tiempo $t+h$ será $f(t+h)$. Enseguida pedimos al estudiante que construya la gráfica del resultado de las diferencias entre la cantidad de entrada y salida. Antes de presentar la gráfica que queremos obtener en el estudiante explicaremos lo que ocurre en el volumen de control al ser la entrada mayor que la salida por medio de las siguientes figuras:



En ellas podemos ver lo que ocurre dentro del volumen de control al entrarle fluido de manera constante al transcurrir el tiempo. Podemos ver que al entrar mayor fluido que el que sale, hará que se produzca una acumulación. La cual irá incrementando, pero cada vez de forma más lenta hasta que llegue el momento en que se conservará. Esto ocurre porque al incrementar la acumulación, se va ejerciendo mayor presión en la base del volumen de control, lo cual ocasiona que la velocidad del flujo que sale incremente de tal forma que llegará el momento en que la cantidad de flujo que sale se hará igual a la que entra. Esta clase de fenómenos es claro para los estudiantes de ingeniería por lo que tenemos como objetivo que llegue a establecer la siguiente gráfica.



En la cual podemos ver cómo va variando la acumulación, hasta llegar al estado estacionario o de equilibrio al ser la cantidad de salida igual a la de entrada. A partir de que el estudiante construya la gráfica anterior presentarle las gráficas que se muestran a continuación, y cuestionarle sobre cómo tendría que ser la entrada y salida del volumen de control para obtenerlas. De esta forma confrontar al estudiante entre el comportamiento de la acumulación del fluido que es el *funcionamiento* de la gráfica y la *forma* de las entradas y salidas. Que dará como resultado la resignificación de la derivada. Haciéndolo de esta forma partícipe en la construcción de su conocimiento



Comentarios finales

Queremos hacer notar que en el diseño de la situación se trabajará con la derivada sin hacer referencia a expresiones algebraicas, ni al concepto de función. Tratando que el estudiante desarrolle las nociones de variación que son fundamentales en la epistemología de la derivada y que es soslayado por el discurso matemático escolar. Todo ello a través de que la graficación puede ser ajustada y llevar a cabo múltiples realizaciones de acuerdo a la situación. En nuestro caso las gráficas serán usadas para establecer la variación de la acumulación del fluido, su *funcionamiento* será establecer el comportamiento de la acumulación de éste y la *forma* será por medio de establecer las variaciones de la entrada y la salida.

Referencias bibliográficas

Campos, C. (2003). *Argumentaciones en la transformación de las funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution, *Educational Studies in Mathematics.* Vol. 53, 255 – 270.

Cen, C. (2006). *Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Cordero, F. (2005a). La socioepistemología en la graficación del discurso matemático escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 18, 477-482.

Cordero, F. (2005b). La institucionalización del conocimiento matemático y el rediseño del discurso matemático escolar. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 19. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. (1989). *Obstáculos epistemológicos relativos al concepto de derivada.* Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Área de Educación Superior, Cinvestav-IPN, México.

García, D. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: Una exploración de las relaciones* $F \leftrightarrow F'$ *en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas.* Tesis Doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.