UN ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA NOCIÓN DE PROMEDIO EN UN CONTEXTO PROBABILÍSTICA

Allan Takeshi De la Cruz Oliva
CICATA-IPN. (México)
a_sternova@hotmail.com

Campo de investigación: pensamiento relacionado con probabilidad, estadística
Palabras clave: promedio, valor esperado, aleatoriedad, determinista

Resumen

Uno de los objetivos del presente trabajo es detectar los motivos por los cuales el concepto de promedio aritmético está tan arraigado en el estudiante que no puede desprenderse de él y lo interpola a otros ámbitos del quehacer matemático, específicamente al probabilístico. Se busca entender, mediante la línea de investigación conocida como la construcción social del conocimiento matemático, por qué los alumnos tienen problemas en aceptar y reconocer al valor esperado, conocido también como media o esperanza matemática, como un promedio en un nuevo escenario con nuevas características.

Introducción

A través del análisis de los programas, planes de estudio y bibliografía recomendada como son libros de texto editados por la Secretaría de Educación Pública, Diccionarios elaborados para cada nivel educativo, etc. El presente trabajo intenta establecer cómo vive institucionalmente el concepto de promedio en los distintos niveles del sistema educativo mexicano, es decir realizar un análisis de cómo y dónde se está enseñando el concepto de promedio, para abrir el camino hacia el entendimiento de cómo se aprende, cómo se concibe y cómo se aplica dicha noción matemática.

Según el marco teórico basado en la construcción social del conocimiento matemático, que da fundamento a éste trabajo, se concibe el conocimiento matemático como una construcción sociocultural. Esta perspectiva permite la interacción sistémica de las dimensiones didáctica, cognitiva, epistemológica y social, que conforman la línea de investigación denominada “la construcción social del conocimiento matemático”, para el estudio y explicación de los fenómenos didácticos ligados a la noción de promedio

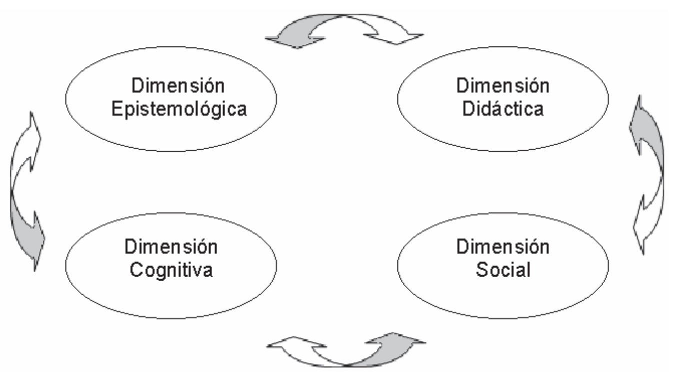

Figura 1. Dimensiones de la Construcción Social del Conocimiento Matemático.

Constituye, además del marco que fundamenta el trabajo, los elementos de análisis preliminares al diseño de una secuencia didáctica, que encuentran su sustento en la incapacidad del alumno para reconocer y relacionar al valor esperado con su idea que le da origen, el promedio que permita al estudiante:

- confrontar su noción de promedio aritmético en un contexto probabilístico y
- construir una herramienta matemática nueva (el valor esperado).

La *componente epistemológica* permite rastrear desde diferentes épocas la evolución que un cierto conocimiento matemático ha tenido, su devenir histórico en diferentes épocas y el proceso de transformación que ha tenido para llegar al aula (transposición didáctica), lo cual nos da la pauta para entender porque razones se manejan de tal forma la introducción, el desarrollo y el tratamiento de dicha noción matemática en el salón de clases, así como en los libros de texto escolares y en la currícula a través del tiempo. Un análisis de este tipo permite conocer la forma en como dicho conocimiento ha pasado de generación en generación, las modificaciones que ha sufrido como consecuencia de tales transformaciones.

A éste respecto la noción de promedio ha sido encasillada en una especie de herramienta muy conocida, pero poco entendida, y es precisamente ésta componente la que puede dar respuesta al porque de tal situación, pues al indagar en su origen y evolución se pueden detectar aquellos elementos que han relegado su aplicación a una simple mecanización de género.

La *componente didáctica* permite conocer y profundizar en las costumbres escolares al momento de tratar con determinada noción matemática (en nuestro caso el promedio), y de cómo vive ésta en la escuela a través de los planes y programas de estudio y libros de texto (producto de dicha transposición didáctica) utilizados en los deferentes niveles educativos, en los cuales se ve reflejado el enfoque que se le da a la noción matemática en cada contexto del conocimiento científico.

Así mismo ésta componente, permitirá comprender, los diferentes significados que adquiere la noción matemática del promedio en cada una de las áreas en las cuales se le utiliza, y abre la puerta para entender de algún modo el porqué una misma noción matemática que es empleada de diferente manera en distintos contextos, no es reconocida como tal por los estudiantes. Y la conciben como cosas totalmente diferentes, separándola así de su esencia. De tal forma que ésta componente es nuestra explicación de lo que está presente institucionalmente.

La *componente cognitiva* permite ir al interior del alumno e indagar en sus concepciones respecto del promedio, saber el por qué de la existencia de lo que llamamos hemiplejia conceptual en el alumno que le crea un vacío entre la definición literal y la definición de uso respecto del promedio, lo cual le impide ver al promedio en todas sus dimensiones. Quien suscribe el presente artículo asigna el término "hemiplejia conceptual" para hacer referencia a aquel al concepto que solo es entendido a través de una de las diferentes definiciones, y que sin embargo es incompleta pues no existe ninguna conexión con el resto de las demás. Cabe destacar que dicha dimensión es la que dio origen al presente trabajo, pues ésta permitió identificar en el alumno un problema generalizado en la mayoría de estudiantes con respecto a ésta noción matemática.

La *componente social*, afecta y modifica a las otras tres componentes, de tal forma que amplia la explicación sobre el fenómeno en estudio. Dicha dimensión permite hacer un análisis de cuáles son las propiedades, características y las ideas que la sociedad atribuye al promedio, en su práctica cotidiana.

El concepto de promedio en los escenarios escolares

A lo largo de la información recopilada se ha podido conocer la manera en cómo nace y se desarrolla el concepto de promedio en el sistema educativo mexicano y se detectó entre otras cosas, que en el nivel básico primaria el primer acercamiento que el alumno tiene es en función de sus calificaciones, y la definición que se le da del promedio es en el libro de 5to año de matemáticas (Ávila, A. y Balbuena, H. 2004), la cual dice: "El promedio de un conjunto de datos se calcula sumando todos los valores y dividiendo el resultado entre el número de datos", el cual se ejercita en base a que el alumno calcule el promedio de una lista de calificaciones.

Al preguntarles a los alumnos de este nivel que entendían por promedio, las respuestas más frecuentes en éste nivel fueron:

- A1. Es la calificación final.
- A2. Es la suma de todos los elementos dividida entre el número de estos.

Estas respuestas dejan entre ver que el alumno no comprende lo que es el promedio, sabe cómo calcularlo, pero no sabe qué significa. Y lo que es peor, el alumno relaciona inconscientemente el promedio con la calificación final. Lo cual indica que el alumno no separa dicha noción del contexto, porque fue así como se definió y uso tal noción, tanto en la vida cotidiana como en la clase de matemáticas.

En el nivel secundario, en el libro proporcionado por la sep para el curso de matemáticas de 2do año (Sánchez, F. 2005) se sigue utilizando el ejemplo de las calificaciones para calcular el promedio, pero ésta vez se pasa de la definición de promedio en base a un enunciado a la definición en términos matemáticos:

$$Promedio = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

Por lo cual ésta será la diferencia más sobresaliente, ya que los ejemplos que se manejan en éste nivel siguen siendo del mismo corte (sobre la base de una lista de calificaciones o de situaciones familiares). Y al cuestionarlos al respecto ellos o parafraseaban la definición de uso del promedio o simplemente se limitaban a decir: es un a fórmula. Sin embargo en el caso de las evaluaciones, el alumno mostraba una cierta interpretación al decir que el resultado que se obtiene al calcular el promedio de sus calificaciones se traduce en algo así como haber sacado la misma calificación en cada uno de los exámenes.
En lo que respecta a los temas de probabilidad, éstos se ven seriamente afectados en ambos niveles por cuestiones de tiempo, niveles de importancia, etc. Así que el alumno prácticamente adquiere un manejo limitado de dichas nociones.

En el nivel medio superior y superior, se da un salto de contexto para tal noción, es decir, todos los problemas que hasta la secundaria se analizaron, tenían como característica el corte determinístico, sin embargo en éstos niveles, el concepto de promedio se utiliza en situaciones aleatorias, en las cuales el promedio a aplicar debe ser el ponderado y no el aritmético. Los problemas puestos en ambos niveles tienen un grado de dificultad mayor a como se venían trabajando en los niveles anteriores. En el caso del nivel medio superior, el libro de textos recomendado, (Murria, R. 1970), la definición que se tiene del valor esperado, es únicamente para el caso discreto:

$$E(X) = p_1 X_1 + p_2 X_2 + \cdots + p_k X_k = \sum_{j=1}^{k} p_j X_j = \sum pX \, .$$

Mientras que para el nivel superior ya se comienza a trabajar con el caso continuo, así que:

$$E[x] = \sum_{x=1}^{n} xp(x) \quad \text{; Caso discreto}$$

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad \text{; Caso continuo}$$

El tener expresado el valor esperado (promedio) en éste tipo de expresión matemática rompe de algún modo con la idea de promedio que el alumno ha venido manejando. Por lo cual, aunque se está hablando en ambos casos de un promedio, la forma de calculado es diferente para el contexto determinístico que para el contexto aleatorio.

Algo que no se analiza en los cursos de probabilidad, pero que a nuestro modo de ver resulta muy importante, es discutir la diferencia entre sucesos deterministas y al azar, ya que la esperanza matemática y la desviación estándar indican una tendencia de los resultados, pero no el resultado que deberá tenerse en un intento dado. Es decir; nos permite conocer lo que muy posiblemente ocurrirá si repetimos varias veces el intento, pero no lo que realmente sucederá. No obstante ésta incertidumbre, el conocimiento de la esperanza matemática y su desviación estándar nos permite orientar nuestras decisiones.

A este respecto la esperanza matemática es separada de su idea central (promedio ponderado) y pasa a ser una más de las medidas de tendencia central. Sin embargo; cuando se investiga algo, se requieren datos, estos datos se obtienen de alguna forma, es importante que los datos de que se disponen sean representativos del total, por ello la importancia de la forma en que se recaban o recolectan esos datos. Una vez reunidos los datos, de tienen que organizar de cierta forma para representarlos a todos (un promedio) o una parte de ellos y otro número que nos indique la variación respecto al promedio. No existe un único valor promedio, sino varios; media, mediana, moda, media armónica, media geométrica, etc. Tampoco existe una única manera de señalar la variación; rango, varianza, desviación estándar, etc. Es por eso que el alumno debe comprender que la elección que se haga del valor representativo y de la variación respecto al mismo es consecuencia de lo que se espera concluir o contradecir y que no se puede dar una presentación de los datos si no se tiene una idea de lo que se busca concluir con ellos.

Es por eso, que a partir de resaltar la comprensión de la idea lo que es la esperanza matemática o valor esperado sobre la base del contexto de una situación dada es cómo se aprecia su importancia y aplicación.

Asimismo, en el nivel superior, el concepto de promedio contenido en los planes y programas de estudio de la materia de probabilidad, presenta un salto que se considera natural, al introducir el concepto de promedio que es manejado desde el nivel medio superior como valor esperado, media, o esperanza matemática, sin embargo dichas conceptos no se ven como un promedio, sino como un punto de equilibrio o como una medida de tendencia central.

Es entonces cuando al decirle al alumno que dicho parámetro es un promedio, éste no cree que lo sea. Y simplemente se limita a aplicar una fórmula, como lo ha venido haciendo, entonces no se percata que el valor esperado no es otra cosa que el promedio cuya estructura tiene cierta semejanza con la media aritmética ponderada.

Comentarios finales

Una siguiente etapa de la investigación que se está iniciando es el diseño de una secuencia, sobre la base de la información recopilada, que introduzca al estudiante en un conflicto con la noción de promedio aritmético, con la finalidad de que éste se percate que no es posible trasladar tal cual éste concepto matemático a la teoría de las probabilidades y comprenda así que ésta noción le es insuficiente para resolver una situación aleatoria. De tal forma que se pueda determinar el vínculo o puente que permita conectar a los escenarios determinísticos y aleatorios.

Cabe destacar que siendo el promedio una noción matemática escolar que se trabaja en todos los niveles educativos del sistema educativo mexicano, cuyo uso se extiende a áreas de conocimiento distintas a la matemática como son: ingeniería, administración, arquitectura, medicina, etc. Es extraño que siendo una noción que todos los estudiantes conocen y manipulan a cierto nivel, no le asocien un único significado a la noción, pues se le relaciona con el contexto del problema donde le dan uso.

Desafortunadamente en la mayoría de los estudiantes, la manipulación del promedio se limita a la suma de los valores de datos dados, divididos entre el número de datos y el significado se vincula al clásico contexto de la calificación final.

Esto sientan las bases para futuras investigaciones sobre aquellos elementos necesarios para la comprensión de algunas nociones matemáticas vinculadas a la probabilidad, que a su vez permitan la vinculación de tal noción matemática (promedio), en el contexto probabilístico

Referencias bibliográficas

Ávila, A. y Balbuena, H. (2004). *Matemáticas quinto grado*. (pp. 64-95). México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

Biehler, R., Scholz, R. W., Sträber, R. y Winkelmann, B. (Eds.) (1994). *Didactics of Mathematics as a scientific discipline*. Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7*(2), 33-112.

Cantoral, R. (2000). *El futuro del cálculo infinitesimal: ICME 8, Sevilla España*. México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* No. 42, 353 – 369.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar).* Tesis doctoral no publicada. Cinvestav IPN, México.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna, Italia: Pitagora Editrice. Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 61-96). Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E.; Harel, G. (Eds.) (1992). *The concept of function: Aspects on Epistemology and Pedagogy*. EUA: MAA, Notes 25.Gal, l., Rothschild, K., & Wagner D. (1990). Statistical concepts and statistical reasoning in elementary scholl children: Convergence or divergence? *American Educational Reasearch Association, Boston, MA.* (pp. 45-59).

Farfán, R. (1995). Ingeniería Didáctica, *Pedagogía 10* (5), 14-23.

Farfán, R. (1997). La investigación en matemática educativa en la reunión centroamericana y del Caribe referida al nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(0), 6-26.

Murria, R. (1970). *Estadística y 875 problemas resuelto.* (pp. 45). MC-Graw Hill.

Sánchez, F. (2005). *Matemáticas 2. A partir de la solución de problemas,* (pp.246-248). México: Fernández Editores.