

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO DE INGENIERÍA CIVIL A TRAVÉS DE LA INTERPOLACIÓN Y LA PREDICCIÓN

Hipólito Hernández Pérez, Germán Muñoz Ortega, Gabriela Buendía Abalos
Cimate, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Chiapas. (México)

Polito_hernandez@hotmail.com

Campo de investigación: epistemología, modelación. Nivel educativo: superior

Palabras clave: situación, interpolación, predicción, práctica social, modelación

Resumen

En esta investigación se contextualizaron fenómenos físicos y de ingeniería civil, como: la variación de la velocidad, variación de temperatura, movimiento periódico, e infiltración de agua en suelos. Se realizaron mediciones en cada situación, que para el caso del movimiento periódico fue a través de un sensor de movimiento. En el experimento de la variación de temperatura se utilizó un sensor de temperatura, en la infiltración de agua de un suelo determinado fue la medición de la variación de la columna de agua. En las situaciones fueron abordadas con la práctica social de la predicción y la herramienta de interpolación para la modelación matemática con la finalidad de predecir en los fenómenos tanto físicos y de ingeniería civil. Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar.

Introducción

En este trabajo se abordaron contextos físicos y de ingeniería civil, a través de la práctica social de la predicción y la interpolación tomando como fundamento teórico, la aproximación socioepistemológica (Cantoral, 2001). Hernández (2006a) ha reportado aspectos de la emergencia de la interpolación y de la predicción en forma implícita desde los estudios del movimiento de los cuerpos por los filósofos del colegio de Merton, los estudios hechos por Oresme hasta el estudio del movimiento realizado por Galileo. También surge la noción de modelación, graficación y esto da origen a la matematización del movimiento. La interpolación y predicción aparecen en forma explícita en el marco epistémico de Newton puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Hernández, 2003). La matematización del sistema genera construcción de herramientas como el binomio de Newton y la serie de Taylor. Por otra parte, Buendía (2005) reporta un estudio socioepistemológico sobre la práctica de predicción como generadora de conocimiento para los fenómenos periódicos.

Se trabajaron situaciones que involucran la interpolación y la predicción en: Movimiento uniformemente acelerado (Hernández, 2006b), variación de temperatura, movimiento periódico y la infiltración de agua en un suelo determinado. Para registrar las mediciones de los experimentos se utilizaron equipos electrónicos como sensores de temperatura y de movimiento conectados a través de una calculadora graficadora. En todos los experimentos se utilizó la herramienta de interpolación y la práctica social de predicción para la modelación matemática. De esta forma se recaba información con respecto a la forma de construcción del conocimiento a través de situaciones diseñadas en contextos físicos y problemas de ingeniería civil. Estas construcciones nos proporcionan elementos de análisis para posteriormente ser presentadas a los estudiantes como experiencias de aprendizaje. Ello proporciona elementos para un cambio epistemológico del Cálculo escolar a través de una visión de Newton-Taylor considerando las prácticas de la predicción e interpolación como reorganizadores del Cálculo escolar.

Antecedentes

Reportamos como antecedentes de nuestra investigación a la emergencia de la interpolación en forma implícita y explícita en la matematización del movimiento, la epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor, la variación de la temperatura en los cuerpos, movimiento periódico, la infiltración de agua en suelos.

Epistemología del binomio de Newton y la serie de Taylor

Cantoral (2001) menciona que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables. Precisa el reconocimiento de los procesos de predicción de corto alcance (la variación del movimiento local) y la predicción de largo alcance (estudio de la variación del movimiento global). El movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen, entonces, herencia: el estado ulterior $P + PQ$ del fenómeno de variación $P \rightarrow P + PQ$ depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto P y la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de la predicción asociada con la variación y cambio en la naturaleza: PQ es la variación de la variable independiente.

Con esta idea y en la necesidad de predecir, conocer, adelantar, Newton estableció el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \dots \quad (1)$$

Donde: $A = P^{m/n}$, $B = \frac{m}{n} AQ$, $C = \frac{m-n}{2n} BQ$, $D = \frac{m-2n}{3n} CD$

Si el exponente m/n es un número entero no negativo, entonces el binomio de Newton es una serie finita. Si el exponente m/n es un número fraccionario o un número negativo entonces el binomio de Newton es una serie infinita.

Según Edward (1979), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Newton y con las diferencias finitas se llegó al polinomio que se conoce como el polinomio de interpolación de Newton;

$$y = y_0 + k\Delta y_0 + k(k-1)/2\Delta^2 y_0 + k(k-1)(k-2)/6\Delta^3 y_0 + \dots + k\Delta^{k-1} y_0 + \Delta^k y_0. \quad (2)$$

En esencia, Taylor consideró el siguiente proceso: $x = x_0 + k\Delta x$; $k = \frac{x - x_0}{\Delta x}$, y tomando a la variación de la variable independiente muy pequeña ($\Delta x \rightarrow 0$), k muy grande, x fija, llegó a construir la siguiente serie:

$$y = y_0 + (x - x_0) \dot{y}_0 / \dot{x}_0 + (x - x_0)^2 \ddot{y}_0 / 2(\dot{x})^2 + (x - x_0)^3 \dddot{y}_0 / 6(\dot{x})^2 + \dots \quad (3)$$

Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis, el binomio de Newton y la serie de Taylor son instrumentos de predicción en un contexto de variación.

El problema de la infiltración de agua

El problema consiste en la infiltración de agua a través de la superficie del suelo y hacia adentro del mismo, producido por las fuerzas gravitacionales y capilares. La diferencia entre el volumen de agua que llueve en una cuenca y el que escurre por su salida recibe el nombre de pérdidas, debido a la infiltración y vaporización. La infiltración juega un papel importante en la relación lluvia y escurrimiento y, por lo tanto, en los problemas de diseño y predicción asociados a la dimensión y operación de obras hidráulicas.

La fórmula más conocida para este fenómeno es la llamada de Horton, reportada por Gardner y Widdstoe (1921) y por Horton (1940): $f_p = f_c + (f_0 - f_c)e^{-kt}$, Donde f_p es la capacidad de infiltración y f_0 , f_c y k son constantes empíricas.

Aspectos metodológicos

Nuestra investigación está inmersa en el marco teórico de la aproximación socioepistemológica, teniendo en cuenta las prácticas sociales como actividad humana y generación de conocimiento matemático.

El corte metodológico que guía el diseño de situación en la presente investigación es primeramente con un análisis a priori como lo establece la ingeniería didáctica que posteriormente se hará un estudio en puesta en escena y posteriormente un análisis a posteriori. Partimos de la epistemología inicial planteada como el binomio de Newton y la serie de Taylor como marco de referencia para el diseño de la situación donde la práctica de predicción es incorporada intencional.

Resultados

En este apartado presentamos los resultados de las tres situaciones exploradas y en cada una de ellas hacemos su desarrollo y análisis.

Situación 1. Variación de temperatura

Una taza de café cuya temperatura es de 85°C se deposita en un cuarto cuya temperatura es de 18°C . Dos minutos más tarde la temperatura del café es de 80°C . ¿Después de cuánto tiempo la temperatura del café será de 65°C ?

$$T_1 = T_0 + \Delta T_0 = 85 - 5.00259 = 79.99741$$

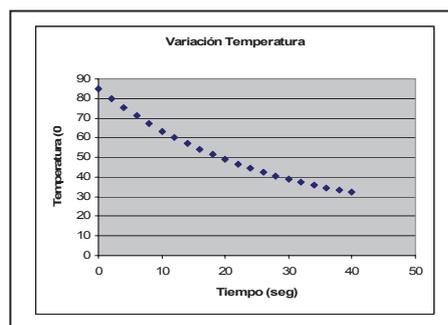
$$T_2 = T_0 + 2\Delta T_0 + \Delta^2 T_0 = 85 + 2(-5.00259) + 0.37359 = 75.3684$$

$$T_3 = T_0 + 3\Delta T_0 + 3\Delta^2 T_0 + \Delta^3 T_0 = 85 + 3(-5.00259) + 3(0.373599) + (-0.0279) = 71.018505 \dots$$

Se sigue el mismo procedimiento usando el polinomio de interpolación de Newton para hallar la temperatura para cualquier tiempo (ver tabla No.1 y en la gráfica No.1).

t(tiempo)	T(temperatura)	ΔT	$\Delta^2 T$	$\Delta^3 T$
0.00000	85.00000	-5.00259	0.37359	- .02795	
2.00000	79.99741	-4.62907	0.34564		
4.00000	75.36834	-4.28343			
6.00000	71.08491	-3.96362			
8.00000	67.12129				
....					

Tabla No. 1. Variación de temperatura



Gráfica No.1

Usando el polinomio de interpolación de Newton, ecuación (2), queda:

$$T_n = T_0 + \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \Delta T_0 + \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 1 \right) \frac{\Delta^2 T}{2!} + \frac{t_n - t_0}{\Delta t} \left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 1 \right) \left(\frac{t_n - t_0}{\Delta t} - 2 \right) \frac{\Delta^3 T}{3!} + \dots$$

$$T_n = T_0 + \frac{\Delta T_0}{\Delta t} \frac{(t_n - t_0)}{1!} + \frac{\Delta^2 T_0}{(\Delta t)^2} \frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)}{2!} + \dots$$

Donde se usó $t_n = t_0 + n\Delta t$
 $t_n - t_0 = n\Delta t$
 $n = \frac{t_n - t_0}{\Delta t}$

Considerando que la primera diferencia representa la ley de enfriamiento de Newton, entonces:

$$\frac{T_1 - T_0}{\Delta t} = \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = k(T_0 - T_m),$$

$$\frac{\Delta^2 T_0}{(\Delta t)^2} = \frac{\frac{\Delta T_1}{\Delta t} - \frac{\Delta T_0}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{k(T_1 - T_m) - k(T_0 - T_m)}{\Delta t} = k \frac{(T_1 - T_0)}{\Delta t} = k \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = k^2 (T_0 - T_m)$$

$$\frac{\Delta^3 T_0}{(\Delta t)^3} = k^3 (T_0 - T_m) \dots$$

En este fenómeno físico se presenta que las variaciones no son constantes por lo que se llega a obtener una serie infinita. Por tanto:

$$T_n = T_0 + k(T_0 - T_m) \frac{(t_n - t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m) \frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)}{2!} + k^3(T_0 - T_m) \frac{(t_n - t_0)(t_n - t_0 - \Delta t)(t_n - t_0 - 2\Delta t)}{3!} + \dots$$

Cuando Δt es muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$), cuando $n \rightarrow \infty$ $t_n = t$,

$$T_n = T_m + (T_0 - T_m) + k(T_0 - T_m) \frac{(t - t_0)}{1!} + k^2(T_0 - T_m) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + k^3(T_0 - T_m) \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots$$

Esta ecuación se obtiene con las diferencias finitas y el polinomio de interpolación de Gregory – Newton, reescribiendo la ecuación anterior como una serie exponencial se tiene entonces:

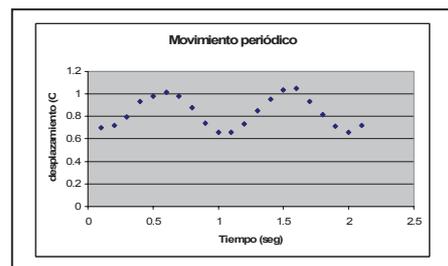
$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}$, donde, $T(t)$, T_m , T_0 representan la temperatura de un cuerpo, del medio ambiente y la temperatura inicial respectivamente.

Situación 2. Movimiento periódico

Movimiento de un resorte. En la tabla No.2, y la gráfica No. 2, tenemos los datos de los valores de desplazamiento y el tiempo, las primeras, segundas, terceras y cuartas diferencias

T(tiempo)	Y(desplaz)	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.1	0.7009	0.0209	0.0523	0.0104	-0.156
0.2	0.7218	0.0732	0.0627	-0.146	0.2092
0.3	0.795	0.136	-0.083	0.0628	-0.104
0.4	0.931	0.0523	-0.02	-0.041	0.0316
0.5	0.9833	0.0314	-0.062	-0.01	0.0521
0.6	1.0148	-0.031	-0.073	0.0418	0.0418
0.7	0.9833	-0.104	-0.031	0.0836	-0.052
0.8	0.8787	-0.136	0.0523	0.0314	-0.041
0.9	0.7427	-0.083	0.0837	-0.01	-0.02
1.0	0.659	0	0.0732	-0.0311	-0.02
1.1	0.659	0.0732	0.0418	-0.052	0.0418
1.2	0.7323	0.115	-0.01	-0.01	-0.041
1.3	0.8473	0.1046	-0.02	-0.052	0.00025
1.4	0.952	0.0837	-0.073	-0.052	0.1775
1.5	1.0357	0.0104	-0.125	0.1253	-0.114
1.6	1.0461	-0.115	-0.00004	0.0104	0.0313
1.7	0.931	-0.115	0.0104	0.0418	0.0209
1.8	0.816	-0.104	0.0523	0.0627	
1.9	0.7113	-0.052	0.115		
2.0	0.659	0.0627			

Tabla No. 2. Movimiento de un resorte



Gráfica No. 2

Se puede predecir el valor del desplazamiento para un tiempo determinado, mediante la interpolación:

$$y(t_k) = (1 + \Delta)^k y_0 = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \Delta^4 y_0 + \dots$$

$$y(8) = 0.7009 + 0.8(0.0209) + \frac{0.8(0.8-1)}{2!}(0.0523) + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)}{3!}(0.0104) + \frac{0.8(0.8-1)(0.8-2)(0.8-3)}{4!}(-0.156) + \dots = 0.862244$$

$$t_k = t_o + k\Delta t$$

Considerando que $k = \frac{t_k - t_o}{\Delta t}$, $k = \frac{8-0}{0.1} = 0.8$

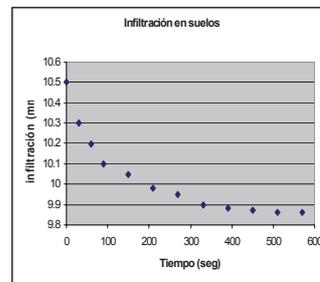
Con estos procesos se puede predecir un movimiento periódico a través de la predicción e interpolación, además el análisis de los datos nos proporciona información de conceptos de cálculo (pendiente, concavidad, periodicidad de la curva).

Situación 3. Proceso de infiltración de agua en suelos

Se realizaron mediciones de la infiltración de agua (penetración de la profundidad) de un suelo formado por caliche. Los datos forman una gráfica con pendiente variable, es decir, tiene un comportamiento de forma exponencial con pendientes negativas tendiendo a un valor constante de f_c llamado constante de saturación. De los datos obtenidos del experimento de infiltración de agua en suelos se utilizó la herramienta de interpolación y la predicción para la modelación matemática con la finalidad de predecir la infiltración de agua en un suelo con respecto a un tiempo determinado (tabla No. 3 y en la gráfica No.3).

Proceso de infiltración de agua en suelos

t(s)	h(m)	Δh	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$	$\Delta^4 h$	$\Delta^5 h$
0	10.5	-0.2	0.1	-0.1	0.15	-0.27
30	10.3	-0.1	0	0.05	-0.12	0.25
60	10.2	-0.1	0.05	-0.07	0.13	-0.25
90	10.1	-0.05	-0.02	0.06	-0.12	0.23
150	10.05	-0.07	0.04	-0.06	0.11	-0.18
210	9.98	-0.03	-0.02	0.05	-0.07	0.08
270	9.95	-0.05	0.03	-0.02	0.01	0.01
330	9.9	-0.02	0.01	-0.01	0.02	
390	9.88	-0.01	0	0.01		
450	9.87	-0.01	0.01			
510	9.86	0				
570	9.86					



Gráfica No.3.

Tabla No. 3. Proceso de infiltración de agua en suelos

Con el binomio de Newton en la forma de interpolación se llega a predecir la infiltración de agua en tipo de suelo, como se muestra en el siguiente cálculo.

$$h(t_k) = (1 + \Delta)^k h_0 = h_0 + k\Delta h_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 h_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 h_0 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \Delta^4 h_0 + \text{etc}$$

$$h(150) = 10.5 + 5(-0.2) + \frac{5(5-1)}{2!} (0.1) + \frac{5(5-1)(5-2)}{3!} (-0.1) + \frac{5(4-1)(5-2)(5-3)}{3!} (0.15) + \text{etc.} = 10.25 \text{mm}$$

$$\text{Considerando que } t_k = t_o + k\Delta t, \quad k = \frac{t_k - t_o}{\Delta t} = \frac{150 - 0}{30} = 5$$

Estos datos y cálculos para predecir la infiltración de agua en suelos nos dan elementos de análisis como obtienen Widdstoe (1921) y Horton (1940). Esta forma de ver a la matemática consideramos que está proporcionando referentes didácticos para la reconstrucción del cálculo escolar (Hernández, 2006a).

Conclusiones

En el manejo de los datos obtenidos a partir de los diferentes experimentos, el uso y desarrollo de herramientas como la interpolación se dio en el marco de la práctica de predicción. Ello favorece una reconstrucción del cálculo escolar normada por el desarrollo intencional de prácticas en el salón de clases de tal manera que conceptos como el binomio de Newton y la serie de Taylor puedan tener un desarrollo más significativo que la memorización de sus elementos. Habrá que desarrollar alguna situación que articule dichos experimentos para una resignificación de ambos conceptos.

Referencias Bibliografía

- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como procesos de matematización en el aula*. Tesis doctoral no publicada, Cinvestav-IPN, México.
- Buendía, G. & Cordero, F. (2005). *Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study*. Educational Studies in Mathematics 58, 299-333.
- Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- Hernández, H. (2003). *Una epistemología de la matematización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16(2), 594-600.
- Hernández, H. (2006a). *Una visión socioepistemológica de la matematización del movimiento: del binomio de Newton a la serie de Taylor*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Chiapas. México.
- Hernández, H. (2006b). *El papel de la interpolación y la predicción en el cálculo*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19(1), 786-792.
- Muñoz, G. (2000). *Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3(2), 131-170.
- Gardner, W., Widdstoe, J. (1921). *The movement of soil moisture*. Soil Sci. 11:215-232.
- Horton, R. E. (1940). *An approach to the physical interpretation of infiltration capacity*. Soil Sci. AM. Proc. 5, 399-417.