SOBRE LA CONSTRUCCIÓN ESCOLAR DE LA FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA: LA TRANSICIÓN $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$

Claudia Leticia Méndez Bello, Gustavo Martínez Sierra, Elika Sugey Maldonado Mejía
Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (México)
claudia_mendez_bello@yahoo.com.mx, gmartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: gráfica y funciones. Nivel educativo: medio superior y superior
Palabras clave: convención matemática, función trigonométrica, radián

Resumen
El concepto de función ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones. En algunas de ellas se han analizado específicamente los diferentes tipos de función, como las algebraicas y las trascendentes, y han dado muestra que poseen una naturaleza específica y por ende producen fenómenos didácticos distintos. En particular, la presente investigación que tiene como objetivo, estudiar la construcción escolar de la Función Trigonométrica y en específico, la transición $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$. Presentamos aquí nuestros primeros resultados.

Introducción

Investigaciones realizadas alrededor del concepto de función han dado muestra que cada tipo de ellas tienen una naturaleza específica, en la cual pueden observarse fenómenos didácticos a su vez específicos. Por ejemplo alrededor del concepto de función mencionamos las investigaciones de Lezama (1999, 2003) y Martínez-Sierra (2000, 2003), con respecto a la función logaritmo a Ferrari (2001) y alrededor de las funciones trigonométricas a Maldonado (2005) y a Montiel (2005).

Para nuestra investigación ubicamos nuestro interés en la Función Trigonométrica (FT). Escolarmente en la construcción de la FT se trata, entre otras cosas, el triángulo, círculo trigonométrico, medición de ángulos (presentados regularmente en grados y radianes) y razones trigonométricas y al momento de mencionar a la FT como una función real de variable real, el argumento x de $sen\ x$ es dado como un número real, para satisfacer que sea una función que va del conjunto de números reales al conjunto de números reales.

Analizando investigaciones recientes referentes a la FT, hemos corroborado que existen diferentes concepciones por parte de estudiantes del Nivel Medio Superior (NMS) al enfrentarse con la transición (conversión) de $grados \rightarrow radianes$ y la transición (equivalencia) $radianes \rightarrow reales$. Al estudiar cómo se construye la FT centraremos nuestra atención en la transición por la que pasa el argumento x de $sen\ x$, es decir, por qué x pasa de ser una medida angular expresada en el sistema sexagesimal (cuya unidad de media es el grado) para convertirse a la expresión dada por el sistema cíclico (en la cual su unidad de medida es el radián) y así ser considera como un número real para que $sen\ x$ sea una función real de variable real.

Para cumplir el objetivo anterior nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo se construye escolarmente la Función Trigonométrica?, y de forma específica, ¿Cuáles son los fenómenos didácticos que se producen en el tratamiento de la transición $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$ por la que pasa x de $sen\ x$? La hipótesis básica es que estos fenómenos pueden explicarse mediante la noción o proceso de la Convención Matemática (CM) (Martínez-Sierra, 2003, 2005).

Marco teórico

De manera general, nuestra investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: *desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional* (Cantoral y Farfán 1998) y el estudio de los *procesos de convención matemática como generadores de conocimiento* (Martínez-Sierra 2005). En la primera buscamos determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio, algunos estudios se han referido específicamente al estudio de la construcción de la noción de función. En este ámbito es que surge la idea de un proceso particular de construcción de conocimiento: la convención matemática. En esencia se busca identificar y caracterizar los procesos de convención matemática en la construcción de saber matemático con referencia especifica en las matemáticas de la variación y el cambio (Martínez-Sierra, 2005). En términos generales la Socioepistemología centra su atención en la caracterización de "aquello que permite la construcción del conocimiento matemático". La Convención Matemática aísla las características de un mecanismo particular de construcción de conocimiento.

> *La convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras* (Martínez-Sierra, 2003).

Metodología

Hemos considerado realizar diversos análisis sobre programas de estudio y libros de texto, diseñar y aplicar un cuestionario a profesores de NMS, así como diseñar una actividad matemática con base a lo que encontremos en nuestro análisis didáctico y trabajarla con estudiantes del NMS. Por el momento los criterios que hemos tomado en cuanta para ubicar y analizar los libros de texto es que esos libros los usan profesores y estudiantes del NMS y NS para el tratamiento de la FT. Los puntos que consideramos para el análisis didáctico son: la forma de definir la medida angular en ambos sistemas (sexagesimal y cíclico), cuál es la razón para la conversión $grados \to radianes$, cómo es el transito de $radianes \to reales$, y cuál es la justificación de tales transiciones para la graficación de las FT.

Estado del arte

En Maldonado (2004) y Montiel (2005), a pesar de que en sus investigaciones analizaron a la FT de forma general, notaron que no es explícito el proceso por el que pasa el argumento de la FT. Para esto nosotros centraremos la atención justamente en la transición $grados \to radianes \to reales$ por la que pasa x. En seguida mencionaremos investigaciones recientes que han tenido como objeto de estudio temas relacionados sobre el tratamiento de la FT, las aportaciones que éstas brindan a nuestro trabajo y de manera breve cómo realizan su investigación. Uno de los criterios que usamos para ubicar las investigaciones relacionadas con nuestro interés es que las investigaciones precedentes a nuestro trabajo, contienen temas de Geometría Plana (medición de ángulos, ángulo, triángulo, círculo, la medida angular denominada grado sexagesimal, el sistema cíclico conocida su unidad de medida como radián) y Trigonometría (círculo trigonométrico, funciones trigonométricas, triángulo rectángulo) dado su contenido temático.

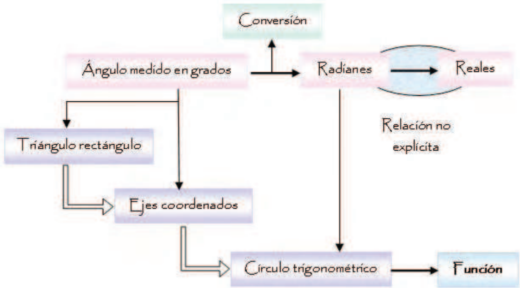
Martínez y Rodríguez (2005). Con la intención de dar cuenta del discurso y vida escolar de los conceptos de ángulo, ángulo negativo, ángulos mayores de 360º, razones y FT, realiza un análisis de libros de textos utilizados por profesores y alumnos, además diseñan un cuestionario con base en lo encontrado tras su análisis didáctico y lo aplican a diecinueve estudiantes. Al confrontar sus análisis didáctico y cognitivo encuentran: que los fundamentos para tratar los temas de su interés no son muy amplios, la mayoría de los estudiantes asumen la inexistencia de ángulos negativos y mayores de 360º, solo tres de diecinueve estudiantes pudieron relacionar a las FT con sus gráficas y notan una dislexia[*****] tras la confrontación.

Navarro (2004). Ella diseña una *ingeniería didáctica* para abordar el tema de funciones con la intención de resarcir la ruptura conceptual entre las gráficas de las funciones algebraicas y trigonométricas. En su investigación reporta concepciones que tienen profesores para graficar una FT dado que no comprenden el uso que tiene el grado y el radián. Presenta los límites especiales $\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x}$ y $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x}$, y realiza un análisis sobre los libros de textos que aparecen en los programas de estudios del NMS. Uno de los fenómenos que observó es que la mayoría de las formas para abordar los límites singulares consideran al ángulo medido en radianes (autores señalan que, si dicho ángulo fuera medido en grados, entonces no se cumple que tales límites tengas los valores de 1 y 0, según sea el caso, Navarro, 2005). Al abordar a las FT y las relaciones con las funciones algebraicas, consideró *<u>números medidos en radianes y en reales</u>* para que al graficar pudiera observar que ambos tipos de números están sobre el eje *x*, dado que en el transcurso de la aplicación de un cuestionario preliminar, a algunos profesores esto se les dificultó.

Maldonado (2005). Enfoca su interés en inferir la presencia de la FT en el medio escolar. Para esto, ella realiza un análisis sobre los programas de estudio del NMS con el fin de detectar los objetivos y propósitos planteados, así como de libros de texto que son utilizados para el estudio de la FT con el propósito de mirar cómo es su tratamiento ubicando que tipo de ejercicios, conceptos, definición y ejemplos presentan antes y después. Con la finalidad de indagar sobre la vida escolar e inferir sobre la concepción que queda en el estudiante sobre la FT y con base en el resultado de su análisis didáctico diseña y aplica un cuestionario a estudiantes del NMS. De acuerdo a su análisis didáctico la autora reporta que antes de mencionar a la FT como función real de variable real, la definen como razón que *involucra a los ángulos medidos en grados, después realizan la conversión de estos ángulos para pasar a los radianes en el círculo unitario*. Al analizar los cuestionarios que aplicó a los estudiantes muestra que algunos de ellos al usar la calculadora les era indiferente teclear los ángulos en grados que en radianes.
Con intención de dar una visión global del tratamiento escolar que tiene la FT, es decir, observar por cuáles contenidos se debe pasar antes de llegar a la FT como una función real de variable real, la autora proporciona un esquema donde representa la evolución de la FT.

[*****] Dislexia: una confrontación entre concepciones que representan los libros de texto y los alumnos (citado en Martínez y Rodríguez, 2005).

Con base en sus análisis, concluye que es en las concepciones de los estudiantes y en libros de texto donde se refleja que no es explícita, en el medio escolar, la relación que existe entre los radianes y los reales para poder a través de ello definir a la FT como una función real de variable real. Y es mediante el siguiente esquema donde hace reflejar la vida escolar de la FT.

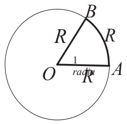


Montiel (2005). En su investigación atiende al fenómeno didáctico relacionado con el tratamiento escolar de la FT. Respecto al análisis que realiza Montiel retomaremos lo expuesto Spivak (1992): "*El método más antiguo consiste en «medir ángulos en grados». Un ángulo «todo alrededor» se asocia a 360, un ángulo de «mitad de vuelta» se asocia a 180, un ángulo de «un cuarto de vuelta» a 90, etc. El ángulo asociado de esta manera al número x recibe el nombre de «ángulo de x grados»*". "*Este enfoque presenta dos dificultades. Aunque puede estar claro lo que entendemos por ángulo de 90 o 45 grados, no está del todo claro qué cosa es un ángulo de, por ejemplo, √2 grados. Aun cuando se pudiera obviar esta dificultad, no es probable que el sistema, al depender como depende de la elección arbitraria de 360, conduzca a resultados tan elegantes; sería pura casualidad que la función sen tuviera propiedades matemáticamente agradables*". Y según este enfoque es la ***medida en radianes*** **la que parece ofrecer el remedio para los dos defectos mencionados.**
De acuerdo al análisis didáctico realizado por Montiel distingue seis etapas, las cuales de igual manera que los esquemas expuestos por Maldonado, proporcionan el proceso o la construcción escolar por la que pasa la FT para considerarse como una función real de variable real. Estas etapas son: **Etapa escolar 1.** Sobre los ángulos: clasificación, unidad de medida, ángulos dirigidos. **Etapa escolar 2.** Sobre los triángulos: clasificación, propiedades, razones trigonométricas, solución de triángulos, las razones trigonométricas en el plano y sus signos de acuerdo a su posición. **Etapa escolar 4.** El círculo trigonométrico: círculo unitario, ángulos - arcos, conversión de unidades ↔ grado → radian real, graficación de la función trigonométrica.

Análisis de algunos libros
En seguida mostraremos de manera muy breve lo encontrado tras nuestro análisis de libros de texto, donde expondremos textualmente lo escrito en los libros de texto analizados. En general hasta el momento, en los libros de texto analizados, no se hace explícito el transito de $radianes \rightarrow reales$, y se hace notoria la existencia de las CM, en frases como "*se acostumbra omitir la palabra radianes*".

Trigonometría plana y esférica (Granville, 2003).

> Medida circular. *En este sistema la unidad es el radián, que es el ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio del círculo.*



$$\acute{a}ngulo\ AOB = 1\ radi\acute{a}n$$

La *medida circular* de un ángulo es su magnitud expresada en función de su radio y tiene la ventaja de que la longitud de un arco cualquiera tiene la misma medida en radios que el ángulo correspondiente en radianes. Este sistema fue introducido en los comienzos del siglo pasado. En la actualidad se usa bastante en los trabajos prácticos, y su empleo es universal en las ramas avanzadas de las matemáticas. En este libro se usarán ambos sistemas. Por lo tanto,

$$2\pi\ radianes = 360^{o},$$

$$\pi\ radianes = 180^{o},$$

$$1\ radi\acute{a}n = \frac{180^{o}}{\pi} = \frac{180^{o}}{3.141593},\ o\ sea,$$

$$1\ radi\acute{a}n = 57.2958^{o} = 57^{o}17'44{,}8''$$

Al escribir las funciones trigonométricas de los ángulos expresadas en medida circular se acostumbra omitir la palabra “radianes”, así:
$sen\ (\pi\ radianes)$ se escribe simplemente $sen\ \pi$ y es lo mismo que $sen\ 180^{o}$.

Trigonometría plana (Niles, 1994).

Definición: Un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan u arco de circunferencia de longitud igual al radio.

$$1\ radi\acute{a}n = \frac{180^{o}}{\pi} = 57.3^{o} \quad aprox.$$

, consideradas cómo fórmulas para la conversión.

$$1^{o} = \frac{\pi}{180^{o}} = 0.0175\ \ radianes.$$

El estudiante debe adquirir práctica para convertir rápidamente de grados a radianes y viceversa; tal conversión puede hacerse mediante el uso de las fórmulas. Con frecuencia, un ángulo en radianes se expresa como fracción de π; por ejemplo, $60^{o} = \pi/3$ radianes.

Si no se estipula la unidad de medida de 30 es un ángulo de 30 radianes, en tanto que un ángulo de 30º, es uno de 30 grados.

Sea *u* un número real y *θ* un ángulo dirigido medido en radianes. De la relación $T(\theta) = T(u)$, se obtiene: $sen(180^{o}) = sen(\pi)"radianes" = sen(\pi)$ y

$$\tan 3 = \tan 3(radianes) = \tan\left[3\left(\frac{180^{o}}{\pi}\right)\right] = \tan 171.9^{o}$$

“Si al expresar el argumento no se utiliza ningún símbolo quiere decir que el argumento es un ángulo expresado en radianes o un número real; esto es, sen 30º es “el seno de un ángulo de 30 grados”, en tanto que sen 30 es “el seno de un ángulo de 30 radianes” o “el seno de un número real 30”

Consideraciones finales

De acuerdo a lo mencionado aquí consideramos que podemos ubicar, describir y dar explicación a los fenómenos didácticos que ocurren respecto a la transición $grados \rightarrow radianes \rightarrow reales$, tras un estudio que reporte su vida escolar y proporcionar explicaciones mediante el proceso de CM. En particular hemos notado que en los libros de texto consultados el tránsito de radianes a reales es ambiguo e impreciso y suponemos que esto es así debido a la falta de conciencia de la convención matemática presente.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México, DF, México: Pearson Educación

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Granville, W. (2003). *Trigonometría plana y esférica*. México: Limusa.

Lezama, J. (1999). *Un estudio de reproducibilidad: El caso de la función exponencial*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Maldonado, E. (2005). *Un análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Martínez-Sierra, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación Sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 5(1). pp. 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*. 8(2). pp. 95-218

Martínez, J. y Rodríguez, P. (2005). *La didáctica y la cognición de los ángulos negativos y mayores de 360º y sus Funciones Trigonométricas. (Un estudio en el nivel medio superior)*. Tesis de licenciatura no publicada, CIMATE, Guerrero, Chilpancingo, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica*. Tesis doctoral no publicada. CICATA-IPN. México

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una ingeniería didáctica basada en la visualización de los límites* $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$ *y* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$. Tesis de maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México, D.F, México.

Niles, N. (1994). *Trigonometría plana*. México, D.F., México.: Limusa

Spivak, M. (1992). *CALCULUS. Cálculo Infinitesimal*. España: Reverté.