PROPORCIONALIDAD Y ANTICIPACIÓN, UN NUEVO ENFOQUE PARA LA DIDÁCTICA DE LA TRIGONOMETRÍA

Gisela Montiel Espinosa
CICATA del IPN. (México)
gmontiel@ipn.mx

Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: medio
Palabras clave: socioepistemología, razón trigonométrica, proporcionalidad

Resumen
La enseñanza de la trigonometría juega un papel importante en la currícula escolar, desde el nivel medio básico hasta el nivel superior. Sin embargo, la investigación en matemática educativa (De Kee, et al, 1996 y Maldonado, 2005) ha dado evidencia de las dificultades en el aprendizaje que muestran los estudiantes de distintos niveles escolares al manipular, interpretar y significar a las razones, ecuaciones, identidades y funciones vinculadas a las relaciones trigonométricas. Las explicaciones reportadas a los diversos fenómenos didácticos vinculados a la trigonometría y las funciones trigonométricas han sido de corte cognitivo y didáctico. El presente escrito bosqueja cómo un acercamiento sistémico estudia, analiza e interviene en el fenómeno didáctico ligado a las nociones trigonométricas, contemplando cuatro componentes a la investigación: el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión social del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza.

El fenómeno didáctico

En la investigación reportada por De Kee, et al (1996) se estudió la *comprensión* de las nociones seno y coseno en dos contextos: el del triángulo rectángulo y el del círculo trigonométrico, desde el modelo constructivista de Herscovics y Bergeron[§§§§§] (1982).

En el contexto del triángulo rectángulo

La *comprensión global*. El estudiante mostró a la relación trigonométrica como la relación entre dos lados de un triángulo rectángulo o la evocación a una relación proporcional, pero donde el término *trigonométrica* no contribuía a dicha relación o al sentido que le daban.

En lo que corresponde a la unidad de medida asignada a la relación trigonométrica podían hablar de centímetros, grados, centímetros sobre grados o no asignarle unidades, pero sin explicar el porqué.

Calcular el seno y el coseno de un ángulo dentro del triángulo rectángulo no fue conflictivo para el estudiante, pero cuando se presentó en ángulo definido únicamente por dos segmentos de recta no pudieron hacerse los cálculos. Hubo la necesidad de completar el dibujo para construir un triángulo y algunos, erróneamente, intentaron usar la ley de senos para resolver el planteamiento.

La *comprensión inicial*. El estudiante mostró reconocimiento de los conceptos previos, pero en algunos casos se reconoció a la hipotenusa como el lado más largo del triángulo, sin importar que fuera o no rectángulo, con lo cual se aplicaban erróneamente las definiciones de las relaciones trigonométricas.

[§§§§§] Citado en De Kee, et al (1996)

La *comprensión de procedimiento*. El estudiante no tuvo dificultades en medir los lados de un triángulo rectángulo y formar una fracción, tampoco se evidenció dificultad para construir un triángulo a partir de un seno expresado en fracción. Cuando se les proporcionó un seno igual a 0.6 algunos transformaron la expresión en fracción y construyeron el triángulo, otros necesitaron de una recomendación. Sin embargo, lo que llamó la atención de las investigadoras fue que ninguno consideró 0.6 como la relación 0.6 sobre 1.

La *abstracción*. Sólo uno de los cinco estudiantes entrevistados mostró conflictos con la invariablidad de las relaciones trigonométricas al rotar, reflejar, trasladar o ampliar los triángulos rectángulos.

La *formalización*. Esta etapa se dedujo del comportamiento general del estudiante en la resolución de todas las tareas. Se mostró que el alumno manejaba el simbolismo de forma adecuada, definían correctamente las nociones de seno y coseno, y las aplicaban correctamente en los triángulos rectángulos.

La experiencia de aula, algunos de los resultados de Maldonado (2005) y lo reportado por De Kee, et al (1996) muestran la falta de significados proporcionales que el estudiante encuentra en la razón trigonométrica. Esto podría relacionarse directamente con la exposición escolar tradicional que encontramos en el nivel medio superior que inicia por definir qué al seno, coseno y tangente, como división de dos longitudes en un triángulo rectángulo, y continúa con las aplicaciones (encontrar el valor faltante en una relación trigonométrica).

Una reflexión histórica sobre la naturaleza proporcional de las relaciones trigonométricas

Con Aristarco (310 – 230 A. C.) se tiene la primera muestra existente de la geometría pura utilizada con un objeto trigonométrico. Aristarco sostenía que la media luna tenía que ser el vértice de un ángulo recto (90°) formado por las líneas Sol - Luna y Luna - Tierra. Aristarco, como todos sus contemporáneos, suponía que la órbita de la Luna era un círculo en cuyo centro está la Tierra y que la Luna lo recorría siempre a la misma velocidad. Si el sol se encuentra a una distancia infinita los cuartos de la Luna ocurrirían cuando el ángulo Sol – Tierra - Luna es recto, es decir, el lapso entre Cuarto creciente-Luna llena, Luna llena-Cuarto menguante, Cuarto menguante-Luna nueva y Luna nueva-Cuarto creciente, serían iguales.

En cambio si el Sol se encuentra a una distancia finita, sus rayos divergen formando un ángulo (Fig. 1). El lapso entre la Luna nueva y el cuarto creciente es menor que el lapso entre éste último y la luna llena. Por la misma razón el intervalo entre la luna llena y el cuarto menguante es mayor que el intervalo entre éste y la siguiente luna nueva.

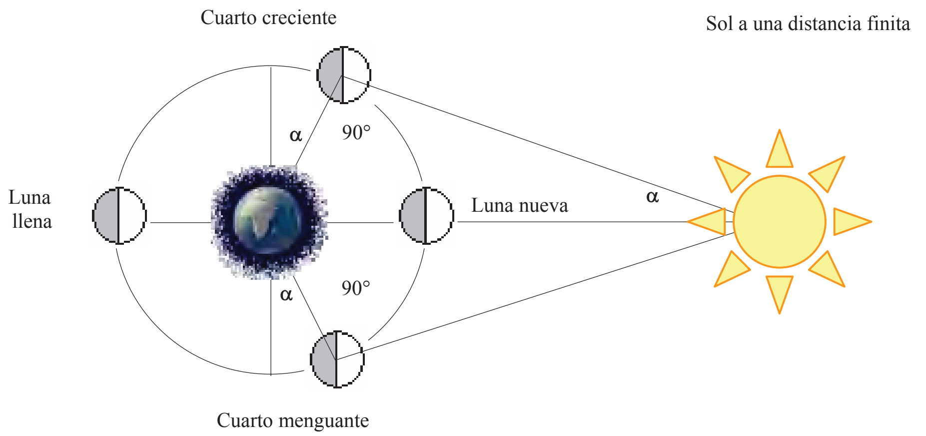


Figura 1

Aristarco encontró que el ángulo α, que forman los rayos del Sol que abarcan la órbita de la Luna, tiene que ser igual a la diferencia angular entre la posición de la media luna. Si llamamos *A* la distancia de la Tierra a la Luna y *B* a la distancia de la Luna al sol, resulta que hay una sencilla razón entre A, B y el ángulo α, que hoy conocemos como tangente: $\tan\alpha = \frac{A}{B}$,

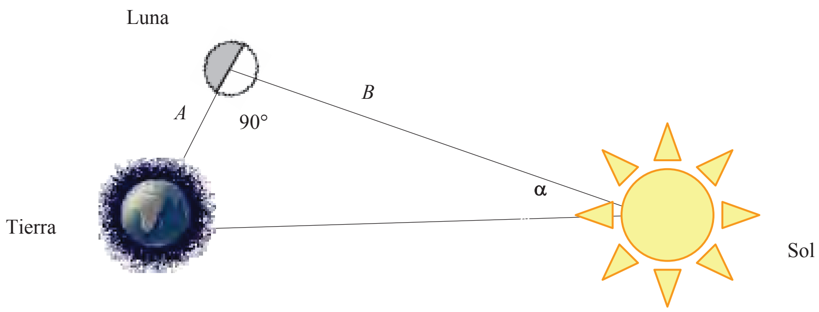
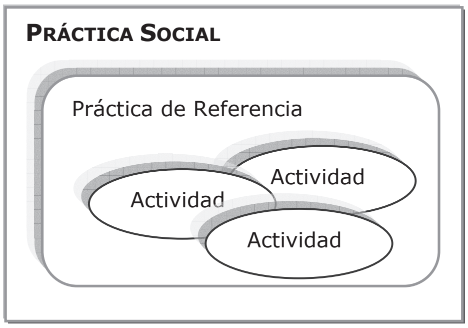


Figura 2

En otras palabras, determinando α se puede calcular qué tanto más lejos está el Sol de la Luna que la Luna de la Tierra. Si para Aristarco la Luna se movía en una órbita circular y con velocidad constante alrededor de la tierra, debía medir cuánto tarda la luna en darle una vuelta completa a la Tierra, para lo cual bastaba con medir el tiempo que transcurre, por ejemplo, entre dos Lunas nuevas. Una vez determinado ese lapso, y si el sol estuviera a una distancia infinita, hay que dividirlo entre cuatro para obtener el tiempo que debería transcurrir entre cada fase de la luna. Entonces, la secuencia de las fases de la Luna estaría dividida en cuatro intervalos iguales. Empleando números concretos, si el periodo de la luna es 29 días y medio, o 708 horas y las fases sucedieran a intervalos perfectamente regulares, entre cualquier fase y la siguiente transcurrirían 177 horas (708 ÷ 4). Aristarco observó que el cuarto creciente ocurría seis horas antes de lo esperado, si el sol estuviera a una distancia infinita. El ángulo α de nuestra figura correspondía, por lo tanto, a seis horas de movimiento de la Luna. De aquí, Aristarco deduce que, puesto que la Luna recorría su órbita con velocidad constante, el ángulo α que se busca determinar debería estar en la misma proporción a una vuelta completa (360°) y que las seis horas de discrepancia al periodo completo de 708 horas: $\frac{a}{360°} = \frac{6}{708}$ de donde $\alpha = \frac{6}{708} 360°$.

Aristarco expresó la relación entre las distancias $\frac{Tierra - Luna}{Luna - Sol}$, que hoy día es $\tan 3° = 0.05$, cómo "*la distancia del Sol a la Luna es veinte veces la distancia de la Luna a la Tierra*". Este cálculo es erróneo, pero no por el método, sino por los datos numéricos. El método geométrico es perfectamente válido, el problema estriba en que la discrepancia entre el lapso Luna nueva – Cuarto creciente con el sol a una distancia infinita y el mismo lapso con el sol a la distancia infinita que se encuentra no es de seis horas sino de cerca de 18 minutos (Ruiz y de Regules, 2002). Con esta cifra y el razonamiento anterior se obtiene la cifra correcta: *el sol esta 400 veces más lejos de la Luna que la Luna de la Tierra*.

Un acercamiento socioepistemológico al estudio del fenómeno



En (Montiel, 2005) se ha propuesto un modelo a la construcción social de la función trigonométrica en tres momentos: *anticipación*, *predicción* y *formalización*. El nombre de cada momento obedece a la *práctica social* que regula aquellas *actividades* asociadas a la *práctica de referencia*, que le dan *uso* y *vía de construcción* a las nociones trigonométricas en su contexto de origen.

El siguiente cuadro sintetiza lo que hemos llamado *principios básicos para la construcción social de la función trigonométrica*,

	Práctica Social		
	Anticipación	**Predicción**	**Formalización**
Práctica de Referencia	Matematización de la Astronomía	Matematización del movimiento oscilatorio	Matematización de la Transferencia del Calor
Contexto Natural	Estático – Proporcional	Dinámico – Periódico	Estable – Analítico
Herramienta Matemática Asociada	Razón Trigonométrica	Función Trigonométrica	Serie Trigonométrica
Variables en juego	sen θ θ ángulo (grados) sen θ (longitud)	sen x x (tiempo / radian - real) sen x (distancia)	sen t t (tiempo / real) sen θ (longitud)

Proporcionalidad y Anticipación

La construcción social de la función trigonométrica en su primer momento, regulado por la anticipación, propone el estudio de fenómenos macro no manipulables donde la proporción genere las nociones y los modelos asociados a la razón trigonométrica. Sin embargo, la recreación del contexto de origen de estas nociones puede provocar que sea más compleja la tarea de simular la realidad, en este caso la astronómica, que la construcción de la razón trigonométrica. Por ejemplo, Ros (1996) reporta la dificultad de realizar una maqueta a escala del sistema solar cuando se cuenta sólo con las instalaciones de una escuela. Ello la obliga a simular el sistema solar en un mapa, aunque esto se convierta a su vez en un modelo a escala (el sistema solar) dentro de otro modelo a escala (el mapa): una escala de otra escala.

Ahora bien, la construcción de conocimiento depende también de las herramientas tecnológicas de que se disponga y sobre todo del conocimiento que antecede a los problemas que abordamos. Los estudiantes que tienen un primer acercamiento a la trigonometría ya tienen conocimientos de la heliocentricidad del sistema solar, es probable que sepan que las órbitas no son circulares sino elípticas, que tengan acceso a las dimensiones de los planetas y del sistema, etc. Además de contar con aparatos de medición y procesamiento de datos más avanzados. Esto es, una génesis ficticia en un contexto similar al de origen es poco más que compleja.

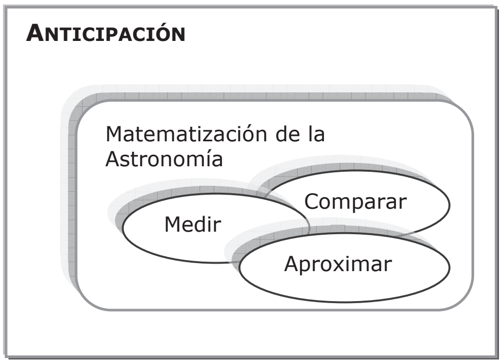
Cuando proponemos recrear la *práctica social de anticipación* en este momento nos referimos a que el discurso matemático escolar debe reconciliar el estudio de la trigonometría con el estudio de la proporcionalidad, donde objetos como el triángulo, el círculo, el ángulo y las relaciones entre ellos sean herramientas en la construcción de modelos geométricos (estáticos), donde surja la *cantidad trascendente trigonométrica*.

Nuestra reflexión histórica busca contrastar con el discurso escolar tradicional el sentido de *usar una noción matemática* con la *aplicación de definiciones matemáticas*. Esto es, mientras que la solución de un problema macro no manipulable obliga a escribir los resultados en formas que hoy conocemos como razones trigonométricas, la escuela define el objeto que da solución a un problema de valor faltante y que resulta en una medida en términos de distancia, alturas, longitudes, etc., sin expresar la relación proporcional que guarda con un objeto manipulable (el triángulo, por ejemplo).

Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico

El discurso matemático escolar se ha organizado durante años (siglos), *para responder a cuestionamientos de orden teórico e ideológico que muestren la coherencia interna del discurso argumentativo o de las eventuales implicaciones que tendría el conducir al razonamiento bajo hipótesis inusuales* (Cantoral y Farfán, 2004). Llevar al aula una propuesta basada en la *construcción social* de la función trigonométrica presupone entonces la modificación del discurso escolar, con el propósito general de *desarrollar el pensamiento matemático* de los y las estudiantes.

Un discurso escolar constituido con base en el estudio de la *proporcionalidad* y en la práctica social de la *anticipación* debe considerar las actividades del estudiante (medición, comparación, aproximación,…) como la vía para descubrir relaciones proporcionales en su realidad, mediada por las situaciones problema que el profesor organice para la construcción de las nociones trigonométricas asociadas. La construcción de modelos *geométricos-estáticos* será entonces la forma de sintetizar, exponer y argumentar la actividad experimental, para concluir con la institucionalización del saber escolar como mecanismo de comunicación por parte del profesor. En esta postura encontramos una diferencia significativa entre el usar y construir, versus el definir y aplicar, aun cuando el contexto de aplicación le proporcione cierto sentido a los objetos matemáticos preconstruidos.



A partir de estas consideraciones hemos iniciado proyectos de investigación con propósitos específicos, donde buscaremos diseñar secuencias de aprendizaje que se adapten a las condiciones y restricciones naturales que impone la escuela, pero que rompan las tradiciones escolares que no problematizan el saber y la actividad como parte del aprendizaje y en consecuencia, para nuestro caso en particular, despojen de su naturaleza proporcional a la razón trigonométrica.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thomson.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La comprensión des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16*(2), 19 - 22.

Herscovics, N. y Bergeron, J. (1982). Des modèles de la compréhension. *Revue des sciences de l'éducation 8*(3), 576 - 596.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav-IPN, México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Ros, R. (1996). Matemática Aplicada y Relaciones de Proporcionalidad. *Revista EMA 1*(2), 12 – 139.

Ruiz, C. y de Regules, S. (2002). *El piropo matemático. De los números a las estrellas*. México: Lectorum.