ANÁLISIS DE ENUNCIADOS DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS PARA LA ESCUELA SECUNDARIA

Elisa Petrone, Mariela Cirelli, Natalia Contreras, Natalia Ferrari y Natalia Sgreccia
Universidad Nacional de Rosario Argentina
Colegio San Bartolomé
Universidad Austral
Universidad Nacional de Rosario.
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas
epetrone@fceia.unr.edu.ar, cirelli@fceia.unr.edu.ar, ncc@fceia.unr.edu.ar, natalia.ferrari@gmail.com, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen. La resolución de problemas está ampliamente aceptada por los teóricos para abordar procesos de enseñanza pero, al parecer, se encuentra escasamente implementada en las aulas. Los datos del presente estudio están constituidos por 45 enunciados de problemas matemáticos para la escuela secundaria que fueron propuestos por los 38 asistentes al Curso de Posgrado y Capacitación Docente "Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria" desarrollado hacia fines del año 2010. Tales enunciados se analizan mediante las siguientes categorías de análisis: claridad semántica; precisión matemática; cantidad de información; registro de representación; contenido involucrado; vinculación con la realidad; momento de utilización. Se ha podido evidenciar que se requiere trabajo formativo en la redacción y selección de los enunciados de problemas para la clase de Matemática.

Palabras clave: enunciados, problemas matemáticos, capacitación docente

Abstract. Problem solving is widely accepted by theorists to address teaching processes but, apparently, is poorly implemented in the classroom. The data of this study consist of 45 mathematical problem statements for secondary school which were proposed by the 38 people who attended to the Graduate and Training Course "Teaching Mathematics through problems in the secondary school" developed by the end of 2010. Such statements are analyzed by the following categories of analysis: semantic clarity; mathematical precision; amount of information; register of representation; content involved; link with reality; time of use. It was shown that a training work is required in the writing and selection of statements problems for Math class.

Key words: statements, mathematical problems, teacher training

Introducción

La resolución de problemas está ampliamente aceptada por los teóricos para abordar procesos de enseñanza pero, al parecer, se encuentra escasamente implementada en las aulas (Álvarez Caneda, Alonso Berenguer y Gorina Sánchez, 2012; Petrone, Sgreccia, Contreras, Mascó, Crevacuore, Ferrari y Reynoso, 2010). El proyecto de investigación en el que se inscribe este reporte pretende indagar acerca de esta problemática. Su objetivo general es generar conocimientos que orienten sobre los modos más apropiados de desarrollar acciones de formación inicial y continua de profesores en Matemática para la enseñanza en la escuela secundaria utilizando la resolución de problemas.

En el marco de un Curso de Posgrado y Capacitación Docente, denominado "Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria", desarrollado hacia fines del año 2010, se trataron diversos aspectos relativos a dicho tópico.

Encuadre teórico

De Guzmán (1993) señala razones de la importancia de la utilización de la resolución de problemas en la enseñanza de la Matemática, entre las que cabe destacar: es lo mejor que puede proporcionarse a los jóvenes, la capacidad autónoma para resolver sus propios problemas; el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo; muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas; es aplicable a todas las edades.

A pesar de ello, y como fuera mencionado, la metodología de resolución de problemas no halla aún un espacio importante de implementación en las aulas. Al respecto Gaulin (2001) menciona algunas dificultades como causa de este fenómeno: el profesor no ha sido formado para enseñar a resolver problemas; muchos profesores manifiestan no sentirse capacitados sobre cómo implementar esas ideas que circulan con relación a la enseñanza mediante problemas; hay diferentes concepciones sobre lo que significa la resolución de problemas como estrategia de enseñanza y de aprendizaje en el aula. Entre ellas:

- *A través de la resolución de problemas*: los problemas se utilizan como herramienta para introducir un nuevo concepto matemático.
- *Para la resolución de problemas*: los problemas se presentan como espacios de aplicación de conceptos matemáticos ya aprendidos.
- *Sobre la resolución de problemas*: se enseñan estrategias de resolución.

El Curso de referencia procuró fortalecer la primera de estas concepciones, por un lado debido a que enseñar matemática mediante esta metodología resulta beneficioso para el aprendizaje de los alumnos y por otro lado por considerarse la menos desarrollada desde las prácticas áulicas y propuestas didácticas.

Metodología de la investigación

La investigación que aquí se comparte adopta un enfoque cualitativo y tiene alcance descriptivo (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Baptista Lucio, 2006). El diseño del estudio es empírico no experimental y de tipo transversal (Bravin y Pievi, 2008).

Los datos están constituidos por 45 enunciados de problemas matemáticos para el nivel educativo correspondiente a la escuela secundaria (alumnos en una franja etaria de 13 a 18 años). Tales enunciados fueron propuestos por los 38 asistentes al Curso (31 profesores en Matemática y 7 estudiantes de Profesorado en Matemática).

Al final del primer encuentro (de un total de ocho de duración que abarcó el Curso) se solicitó a los participantes que para el siguiente trajeran uno o dos enunciados de problemas que suelen utilizar, o utilizarían, en sus clases. En el segundo encuentro se recogieron los enunciados de los problemas solicitados y se les comunicó que se trabajaría con ellos en un próximo encuentro. El equipo de investigación compiló los enunciados de los 45 problemas recogidos (P-1 a P-45) y en el tercer encuentro lo entregó a los participantes informándoles que debían analizarlos para el siguiente. En el cuarto encuentro se trabajó en forma conjunta en el análisis de los enunciados de los problemas. A partir del intercambio en el grupo-clase fueron emergiendo componentes a considerar para el análisis de los enunciados de los problemas:

1. claridad semántica;
2. precisión matemática;
3. cantidad de información;
4. registro de representación;
5. contenido involucrado;
6. vinculación con la realidad;
7. momento de utilización.

Tales componentes se constituyeron, por un lado, en la versión seminal de las categorías de análisis empleadas en esta investigación y por el otro en instrumentos didácticos para los docentes a la hora de planificar actividades de enseñanza y de evaluación.

Además, en un quinto encuentro se solicitó a los participantes que expresaran por escrito, en forma individual y anónima, los aprendizajes logrados a partir del análisis de enunciados de problemas (Petrone, Sgreccia, Mascó, Crevacuore, Contreras, Ferrari y Reynoso, 2011).

Principales resultados

Se presentan aquí algunos enunciados de problemas que los participantes compartieron en el Curso de referencia y que ellos utilizan o utilizarían con sus estudiantes de escuela secundaria. Es de esperar, por ello, que los mismos estén entre los "favoritos" por parte de los docentes.

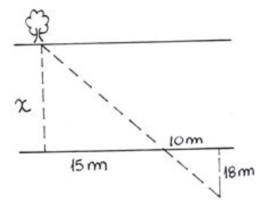
En tales enunciados, de acuerdo a cada una de las siete categorías de análisis presentadas, se destacan aspectos a fortalecer. Algunos de estos aspectos fueron tratados grupalmente en el Curso de referencia y otros fueron surgiendo en el análisis posterior del equipo de investigación.

En el enunciado:

(P-28) *Un técnico en computadoras cobra $10 por su visita a domicilio más $12 por hora trabajada. ¿Cuánto será el costo de su visita si trabaja 3 hs? ¿Y si trabaja sólo una hora? ¿Cuánto cobrará si trabaja x horas?*

Se utiliza una misma palabra (visita) con dos sentidos diferentes, lo cual resta claridad semántica al enunciado.

Un ejemplo de falta de precisión matemática se encuentra en el siguiente enunciado:



(P-20) *Fernando necesita medir el ancho del canal y para ello toma, desde una de las orillas, las medidas indicadas en el esquema. ¿Cómo hace para calcular el ancho del canal con los datos que tiene? ¿Qué resultado obtiene?*

Se puede apreciar que faltan explicitar datos, como por ejemplo, que las rectas representadas horizontalmente son paralelas entre sí, que los segmentos representados verticalmente son paralelos entre sí y perpendiculares a las rectas horizontales. Por otro lado, si bien el esquema es sólo representativo de la situación las medidas de los segmentos indicadas en el esquema no guardan relación con la longitud que se indica para los mismos, por ejemplo el segmento que mide 18 metros tiene en el dibujo una longitud menor al segmento que mide 15 metros. Además, las preguntas del problema resultan ambiguas.

La información que se presenta en el enunciado no es un aspecto menor. A veces los datos son los justos y necesarios, a veces sobran datos y a veces faltan (como en el enunciado anterior). Esto también cabe para la consigna que se le da al resolutor: qué se desea que la persona haga ante tal situación. Así, en el enunciado:

(P-8) *En un triángulo isósceles BAC, la bisectriz del ángulo externo de A, es paralela al lado desigual BC.*

falta la cuestión a resolver, es decir, la pregunta o consigna de acción dirigida al alumno.

Otro ejemplo es:

(P-37) *Para completar los litros que corresponden a 10 personas, Mariel sumó dos veces los litros que corresponden a 4 personas y le agregó 3/2 l. ¿Es correcto lo que hizo? ¿Hay otra forma de encontrar ese valor?*

Se puede advertir que resulta confuso, faltan datos y claridad en la redacción.

Claro está que los datos ofrecidos no deberían ser inconsistentes entre sí, como sucede en la siguiente situación:

(P-25) *Una escalera de 3 metros de largo se apoya contra una pared formando un ángulo de 70° con el piso. El pie de la escalera debe estar a 1,20 metros de la pared. a. ¿A qué altura sobre la pared se debe apoyar su extremo superior? b. ¿Cómo habrá que ubicarla para que su extremo superior se apoye a 2,30 metros de altura? ¿Y a 1,40 metros de altura?*

Esto sirve para subrayar la necesidad de resolución previa por parte del docente, lo cual también le puede dar indicios acerca del orden para realizar las preguntas, si es que la situación presenta más de una. Por ejemplo, en el enunciado:

(P-7) *José tiene una empresa de alfombrados y le encargaron alfombrar un salón de 630 m^2. A la mañana del primer día, alfombró 2/7 del salón y a la tarde 2/5 del resto. Lo que falta lo dejará para el segundo día. a. ¿Cuántos metros cuadrados le falta alfombrar? b. ¿Qué fracción alfombró el primer día? c. Si trabaja al mismo ritmo que el día anterior. ¿Le alcanzará la mañana del segundo día para terminar con el trabajo?*

Resulta atinado intercambiar entre sí la primera pregunta con la segunda. Además, hay ambigüedades que invalidan las consignas de acción: en b., cuando se pide la "fracción" alfombrada el primer día, no se especifica respecto de qué total; en c. la palabra "ritmo" parece aludir a "velocidad" con lo cual debería contarse, no sólo con el dato de la cantidad de metros alfombrados, sino también con la cantidad de tiempo que trabajó a la mañana y a la tarde para poder dar respuesta a esta consigna.

También hay problemas que se pueden abordar mediante diversas estrategias de resolución, involucrando diferentes contenidos conceptuales y procedimentales, tales como el siguiente:

(P-16) *Si un número es divisible por 3, ¿su cuadrado será también divisible por 3?*

Resulta beneficioso que el docente conozca y prevea este hecho que, en parte, estará sujeto a las secuenciaciones de actividades que viene desarrollando en su curso. En este sentido, un mismo problema puede utilizarse en distintos momentos del tratamiento de un contenido, según la intencionalidad docente, como es el caso de:

(P-2) *Melisa tiene 3 años más de la mitad de los que va a tener Belén el año que viene. Hoy por hoy Belén lleva a Melisa 6 años. ¿Cuántos años tiene cada una?*

Algunos problemas, como el siguiente, son didácticamente inadecuados por varias razones:

(P-4) *El trueque indio: En una tribu de indios utilizan caracoles como monedas. Sabemos que 3 espejos y 2 arcos han costado 7 caracoles y un arco ha costado 6 caracoles. ¿Cómo averiguar cuántos caracoles hay que dar por cada arco? Nota: Utilizado como actividad* *disparadora para Sistemas de Ecuaciones Lineales con 2 incógnitas. Realizado en grupos de 3 o 4 alumnos.*

La respuesta está contenida explícitamente en uno de los datos del problema, o sea, no habría nada que pensar ni resolver. Si se quisiera, además, averiguar cuántos caracoles (tomado como unidad de pago) habría que dar por cada espejo (avanzando hacia la idea de "sistema de ecuaciones con dos incógnitas") resulta que esa cantidad es un número fraccionario negativo. Así, la intención de "vincular con la realidad" pierde todo sentido.

Resultados globales de la muestra recogida

En cuanto a la vinculación con la realidad, fue posible reconocer que sólo la quinta parte de los problemas propuestos pertenece al ámbito intra-matemático. El resto (la gran mayoría) involucra personas y objetos concretos en alguna situación relativamente cotidiana.

El registro de representación predominante fue el coloquial. La quinta parte incluye, además, al registro gráfico, en el que se realizan bocetos de dibujos matemáticos que portan información. Sólo dos casos incluyen al registro tabular entre sus datos y el simbólico algebraico está ausente.

Seguidamente se muestran los contenidos matemáticos a los que se detectó que aluden los problemas recolectados. Entre paréntesis se muestra la cantidad de ellos que hacen referencia a cada contenido, un mismo problema puede estar contemplado en más de una categoría.

- proporcionalidad directa (8);
- sistemas de ecuaciones (6);
- fracciones (5); trigonometría (5);
- área; ecuaciones (4);
- perímetro (3); volumen (3);
- elementos de triángulos (2); combinatoria (2); semejanza de triángulos (2); construcciones geométricas (2);
- ángulos (1); divisibilidad (1); números enteros (1); coordenadas cartesianas (1); crecimiento exponencial (1); factorización de polinomios (1); interpretación del gráfico de una función (1); números complejos (1); optimización (1).

Conclusiones

Cabe mencionar que la actividad de referencia (que los participantes del Curso compartan enunciados de problemas que suelen usar en sus clases) sirvió para profundizar el grado de conciencia acerca de los elementos a tener en cuenta en los problemas que los docentes en

Matemática les proponen a sus alumnos (Petrone, Sgreccia, Mascó et al., 2011). Tales elementos se sintetizaron en las categorías de análisis que aquí se esbozaron.

A continuación se mencionan algunas de las reflexiones surgidas en el marco del Curso y enriquecidas por los aportes del equipo de investigación en relación a las consideraciones que deben tenerse al momento de pensar una propuesta de enseñanza aprendizaje basada en problemas (Petrone, Sgreccia, Contreras et al., 2011).

Es deseable que los docentes:

- Seleccionen situaciones problemáticas que constituyan un desafío para los alumnos aprovechando su carácter motivador, pero que a su vez, que puedan ser abordadas a partir de sus conocimientos previos para que no se constituyan en promotoras del desánimo.
- Anticipen posibles dificultades y preguntas que surjan durante la resolución y organicen sugerencias para orientar a sus alumnos. Para ello, es fundamental que resuelvan estas actividades previamente.
- Reflexionen sobre las habilidades que se busca desarrollar y si las actividades propuestas son adecuadas y acordes para lograr ese fin.
- Redacten clara y correctamente los problemas atendiendo a su claridad semántica, y precisión matemática.
- Propongan problemas de complejidad gradualmente creciente teniendo en cuenta el momento del proceso para el que son más adecuados.

Por consiguiente, deberían evitar:

- Plantear problemas innecesariamente complejos.
- Subestimar el nivel intelectual de los alumnos.
- Redactar problemas con enunciados confusos o incompletos.
- Incorporar datos que generen contradicciones o no explicitar datos necesarios para la resolución de las situaciones.
- Plantear situaciones problemáticas muy alejadas de la realidad.

En cuanto a las decisiones didácticas involucradas en la actividad de resolución de problemas, caben algunas reflexiones:

Se considera que constituye una decisión (fundamentada) del docente cuánto se destina a trabajar sobre las vinculaciones entre las distintas formas de resolución de un problema, en función de para qué sirve. Incluso, a partir de un problema inicial pueden surgir muchos (otros) problemas (situaciones más generales o más particulares, relativizadas según el universo en el que cada uno se mueve), producto de ir metiéndose cada vez más en el problema, donde se van realizando restricciones o adaptaciones a la pregunta original. Por ejemplo, ante la consigna "determinar qué cuadrilátero se forma al unir los puntos medios de un cuadrilátero dado", precisar condiciones adicionales sobre los datos del problema para lograr que el cuadrilátero que se obtiene cumpla determinadas características, por ejemplo "tener sus lados congruentes", "tener sus ángulos congruentes", "tener pares de lados paralelos". También, a partir de interrogantes que van surgiendo, pueden quedar algunas cuestiones "para seguir pensando" e ir retomándolas luego. El problema original se puede ir modificando dependiendo de la reflexión que se realice en la clase. Esto es, surgen nuevos problemas a partir de lo que emerge en la clase.

Así, por ejemplo, el problema originalmente presentado:

> (P-38) *Claudia compró un terreno en un country y quiere instalar allí una pileta de natación rectangular. El arquitecto le dijo que, para que el diseño sea armonioso, su pileta debe tener el doble de largo que de ancho y los entendidos opinan que la profundidad debe ser la mitad del ancho. Para hacer un presupuesto, averigua que el material para las paredes y el piso cuesta $75 el m^2; la soldadura para las juntas $40 el m; la excavación y colocación $50 el m^3 y el traslado de materiales $100.*
>
> *a) ¿Cuánto costará a Claudia una pileta de 5m de ancho?*
>
> *b) Si Claudia dispone de $10000, ¿puede construir una pileta de 8 m de largo?*
>
> *c) ¿Cuáles son las dimensiones de la pileta más grande que puede construir con $5665?*

Puede tener sus variantes si parte de los datos del enunciado se presentan mediante un esquema representando la pileta en cuestión. Los costos, dados como números, podrían sustituirse por letras. Se les da así forma de variables y el problema involucra de manera más explícita al álgebra. Otros interrogantes se pueden agregar, como por ejemplo: *En otra empresa el costo de los materiales es de $80 el m^2, $35 el m^3 y $120 el traslado de materiales, ¿cuál de las dos empresas conviene?*

Aquí aparece entonces la importancia del tiempo (o momento) asignado a las puestas en común de las producciones de los alumnos en la clase, acorde con una concepción de aprendizaje no-lineal, que tiene idas y vueltas, y que tiene que ver también con prácticas instaladas (en docentes y alumnos) tanto en la vida cotidiana como en las experiencias escolares previas. Una parte del trabajo matemático es decidir qué cosas (conocimientos, relaciones, instrumentos) utilizar, lo cual tiene que ver mucho con las preguntas que van generando los alumnos. Ciertos momentos son cruciales y pretender acelerarlos no permite aprovechar en su totalidad sus riquezas, ya que es trascendente que cada uno haga su propia síntesis, a partir de los elementos con los que cuenta. Así, aparecen distintos momentos de trabajo matemático en la clase: el de producir una respuesta y el de producir una explicación o justificación de esa respuesta, de comunicar al resto (docente y compañeros). Se trata de decisiones didácticas que ponen el eje en "hacer Matemática" en la clase.

Para finalizar, queremos destacar que la mayoría de los docentes participantes del Curso expresaron la importancia de contar con espacios destinados a la puesta en común de sus propuestas a fin de que, a partir de la interacción con sus pares, surjan aspectos enriquecedores de sus propias prácticas de enseñanza.

Referencias bibliográficas

Álvarez Caneda, M.Y., Alonso Berenguer, I. y Gorina Sánchez, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. En R. Flores (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 25, 625-634

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Buenos Aires: Ministerio de Educación.

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación*. México DF: Mc Graw Hill.

Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma, 19*, 51-63.

Guzmán, M. de (1993). Enseñanza de la Matemática. En D. Gil y M. de Guzmán. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias* e *Innovaciones* (pp.62-81). Madrid: Popular / Ministerio de Educación y Ciencia de España.

Petrone, E., Sgreccia, N., Contreras, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2010). Enseñar Matemática mediante problemas en la escuela secundaria. *Conexión: Revista de Investigaciones y Propuestas educativas, 8*, 185-194.

Petrone, E., Sgreccia, N., Contreras, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2011). *La Enseñanza de Matemática usando Resolución de Problemas*. Ponencia presentada en las VI Jornadas Nacionales de Matemáticas. La Rioja.

Petrone, E., Sgreccia, N., Mascó, P., Crevacuore, N., Contreras, N., Ferrari, N. y Reynoso, E. (2011). *Una experiencia de capacitación docente en enseñanza de la Matemática a través de* *problemas: análisis de enunciados*. Ponencia presentada en las IV Jornadas de Educación Matemática y I Jornadas en Investigación en Educación Matemática. Santa Fe.