Uso y desarrollo de pensamiento relacional por alumnos de tercero de Primaria[1]

Marta Molina González
(martamg@ugr.es)
Universidad de Granada

Encarnación Castro Martínez
(encastro@ugr.es)
Universidad de Granada

En esta comunicación se describen las estrategias de pensamiento relacional empleadas por un grupo de alumnos de tercero de Primaria en la resolución y construcción de igualdades numéricas de suma y resta. Este trabajo forma parte de un experimento de diseño centrado en el estudio del desarrollo de pensamiento relacional por alumnos de tercero de Primaria en el contexto de la resolución de igualdades numéricas, compuestas por números naturales, y basadas en relaciones o propiedades aritméticas básicas tales como la propiedad conmutativa de la suma, la complementariedad de la suma y la resta o la compensación. Siguiendo la propuesta Early-Algebra, el trabajo centrado en el uso y desarrollo de pensamiento relacional se presenta como potenciador de un enfoque estructural de la aritmética.

Reforma de la enseñanza del algebra. Early-Algebra

La enseñanza tradicional del algebra es ampliamente criticada por numerosos investigadores (Booth, 1989; Kaput 1999, Mason, Davis, Love & Schoenfeld, según Lee, en prensa). La crítica internacional se basa principalmente en el gran número de estudiantes que fracasan en esta área y dejan de estudiar matemáticas, la falta de conexión entre el álgebra y las demás áreas de las matemáticas, y la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes.

La gran insatisfacción con la actual y tradicional enseñanza del álgebra, el reconocimiento de la importancia de los hábitos mentales que están involucrados en

[1] Trabajo presentado en el Symposium Internacional sobre Matemática Temprana, Cádiz, 5-6 Mayo 2006.

actividades algebraicas, y la preocupación por hacer el estudio del álgebra accesible a todos los estudiantes, han conducido a buscar formas más efectivas de enseñar álgebra. En la última década se han sugerido enfoques para la mejora de la enseñanza del álgebra centrados en la resolución de problemas, otros que potencian y fortalecen las habilidades aritméticas y procesos de enseñanza focalizados en el uso de tecnología (Freiman y Lee, 2004). Una de las propuestas más ambiciosas, conocida como Early-Algebra, consiste en un cambio curricular: la introducción del álgebra desde los primeros años escolares, no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar en objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con compresión de las matemáticas (Kaput, 2000; Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000; Carpenter, Franke y Levi, 2003).

Según la propuesta Early-Algebra los maestros han de promover la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y crear un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan, argumenten, comprueben ideas y también practiquen habilidades de cálculo (Blanton y Kaput, 2003). Se considera que los diferentes modos de pensamiento involucrados en la actividad algebraica son hábitos mentales importantes que los alumnos deben de adquirir y que tienen el potencial de enriquecer la actividad matemática escolar y, muy especialmente, el aprendizaje de la Aritmética.

Esta propuesta va acompañada de una amplia concepción del Álgebra que engloba el estudio de relaciones funcionales, el estudio y generalización de patrones y relaciones (lo que incluye la aritmética generalizada), el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y el desarrollo y la manipulación del simbolismo (Kaput, 2000; Blanton y Kaput, 2004).

Early-Algebra y Aritmética. Una de las propuestas de Early-Algebra consiste en fomentar un enfoque estructural de la Aritmética rompiendo con el énfasis computacional predominante en los primeros cursos escolares. Dicho énfasis se señala como causa de la falta de conciencia de los alumnos sobre las estructuras que subyacen a las operaciones matemáticas y sus propiedades. Según Kieran (1992), la forma tradicional de introducir la aritmética no ha sido eficaz en el desarrollo de las habilidades de los alumnos para reconocer y usar la estructura matemática, dando lugar a una de las principales dificultades en la introducción del álgebra.

En esta línea, tomamos como referencia fundamental un trabajo dirigido por Carpenter (Carpenter et al., 2003). En él se aborda, desde la enseñanza de la Aritmética, el desarrollo de diversos aspectos del pensamiento algebraico entre los que se encuentran la comprensión del signo igual, la observación y generalización de relaciones numéricas y la elaboración de conjeturas, todo ello abordado en el contexto de igualdades numéricas y simbólicas.

Partiendo del trabajo de Carpenter y sus colaboradores, hemos realizado dos experimentos de enseñanza centrados en dos aspectos del pensamiento algebraico a desarrollar en el contexto de la Aritmética: el pensamiento relacional y la comprensión del signo igual. El primero de estos estudios analiza el desarrollo de la comprensión del signo igual y aporta evidencias de la capacidad de los alumnos de tercero de Primaria de desarrollar pensamiento relacional como una estrategia para la resolución de igualdades numéricas (Molina, 2004; Molina y Castro, 2005; Molina y Ambrose, pendiente de aceptación). En el segundo estudio, en el que se centra esta comunicación, se profundiza en el análisis del desarrollo de pensamiento relacional; objetivo que se ve favorecido por la comprensión relacional del signo igual que muestran la mayor parte de los alumnos. En ambos casos se trabaja en el aula, con alumnos de tercero de Educación Primaria, mediante la discusión y resolución escrita de igualdades numéricas abiertas e igualdades verdaderas y falsas.

Pensamiento Relacional

Definimos el término *pensamiento* como la actividad intelectual (interna) mediante la cual las personas entienden, comprenden, y dotan de significado a lo que les rodea; consistente en formar, examinar, reflexionar y relacionar ideas o conceptos, tomar decisiones y emitir juicios de eficacia. Esta actividad es la que permite encontrar respuestas ante situaciones de resolución de problemas o hallar los medios para alcanzar una meta. Por otra parte, adoptamos una acepción general del término relación: conexión, correspondencia o situación que se da de una cosa con otra o de una cosa con si misma, ya sea en la realidad o en la mente. Ambas definiciones nos permiten definir el término pensamiento relacional, entendido como pensamiento sobre relaciones, de la siguiente forma:

> El pensamiento relacional es la actividad o acción intelectual de **examinar y buscar** relaciones entre objetos matemáticos, **reflexionar y utilizar** dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados.

Entendemos que cuando una persona piensa relacionalmente o, equivalentemente, usa pensamiento relacional, no sólo observa o detecta las relaciones existentes entre los objetos matemáticos en cuestión, sino que éstas pasan a ser consideradas objeto de pensamiento con la intención del logro de un objetivo. Las relaciones son los conceptos e ideas en los que se basa la resolución del problema.

Centrados en el contexto de la aritmética, y más concretamente en la resolución de igualdades numéricas, los objetos matemáticos en los que se centra dicha actividad son los números y las operaciones. En particular, este tipo de pensamiento puede tener lugar en situaciones de cálculo y en otras en las que se relacionan expresiones aritméticas.

El uso de pensamiento relacional en el cálculo conlleva el uso de estrategias flexibles, no usuales o informales, muy relacionadas con el cálculo mental y con el uso del sentido numérico. Por ejemplo, diremos que una persona usa pensamiento relacional para realizar el cálculo 14 + 9 cuando, tras examinar la expresión, busca relaciones entre uno de los términos y algún otro número, que le faciliten dicho cálculo. En este caso puede buscar un número que sumado a 14 de 20. Tras encontrar el valor desconocido en la igualdad 14 + n = 20, se necesita, para poder completar el cálculo, buscar la relación que existe entre 6 y 9.

De este modo el pensamiento relacional puede ser utilizado para producir respuestas o resultados que no se conocen o no se recuerdan en un determinado momento, a partir de otros que se conocen, o para resolver una secuencia de operaciones de forma más sencilla transformándola mediante la aplicación de propiedades aritméticas fundamentales.

Por otra parte, se puede usar pensamiento relacional en situaciones en las que se relacionan expresiones aritméticas mediante relaciones de igualdad, desigualdad o de orden. En este contexto, el uso de pensamiento relacional implica la obtención de la respuesta a partir del examen de los números o expresiones involucradas y el establecimiento de relaciones entre ellos; no siendo necesario realizar explícitamente las operaciones expresadas (Carpenter et al, 2003). Por ejemplo, para resolver la igualdad numérica abierta 8 + 4 = ☐ + 5, se pueden comparar las expresiones que la componen, “8 + 4” y “☐ + 5”, y reconocer que ambas contienen una suma y que una contiene un 4 y otra un 5. Usando sentido numérico se sabe que 4 es una unidad menor que 5, y, mediante el conocimiento de la relación de compensación, puede deducirse que la respuesta es una unidad menos que 8.

El trabajo centrado en pensamiento relacional implica focalizar la atención en relaciones relativas a las operaciones y los números involucrados, manteniendo el cálculo de las operaciones en un segundo plano. De este modo, como señalan Carpenter et al. (2003) y Koehler (2004), se favorece un aprendizaje significativo de la aritmética, el desarrollo de fluidez en el cálculo y el desarrollo de una buena base para el posterior estudio formal del álgebra.

Igualdades y relaciones aritméticas

La mayoría de los currículos elementales de Aritmética emplean el lenguaje de las igualdades numéricas desde el inicio del estudio de las matemáticas, siendo éstas un componente importante del lenguaje matemático (Grouws, 1974; Lindvall e Ibarra, 1980). El trabajo con igualdades numéricas abiertas es considerado importante, dentro del aprendizaje de la Aritmética, para que los alumnos comprendan las operaciones básicas y la relación existente entre ellas, además de para modelizar y resolver problemas (Weaver, 1972; Lindvall e Ibarra, 1980). Asimismo, las igualdades numéricas son consideradas un buen contexto en el cual introducir a los alumnos a la resolución de ecuaciones (siendo la incógnita representada mediante una línea o una figura) y trabajar la comprensión del signo igual, un componente esencial del pensamiento algebraico (Radford, 2000; Carpenter et al., 2003; Freeman y Lee, 2004). Según Lindvall e Ibarra (1980), *“Puede decirse que los alumnos no poseen una verdadera compresión del signo igual y de las ecuaciones hasta que muestran cierta maestría en las igualdades abiertas”* (p. 50).

Carpenter et al. (2003), partiendo del trabajo de Davis (1964), proponen las igualdades numéricas abiertas y verdaderas y falsas como contexto en el cual favorecer que los niños desarrollen y utilicen pensamiento relacional. Las igualdades numéricas proveen de un contexto flexible en el cual pueden representarse relaciones aritméticas, focalizar la atención de los alumnos en ellas y favorecer el diálogo sobre su comprensión de ideas matemáticas básicas, tales como las propiedades de las operaciones o de la estructura de nuestro sistema numérico de base diez, por ejemplo con las igualdades $42 = 40 + 2$, $2 + 40 = 42$, $42 = 30 + 12$.

Las discusiones sobre igualdades basadas en relaciones y propiedades aritméticas pueden ayudar a los alumnos a aprender aritmética con comprensión y desarrollar una sólida base para el posterior estudio del álgebra haciendo que los alumnos tomen conciencia de la estructura que subyace a la aritmética (Kieran, 1992; Resnick, 1992; Carpenter et al., 2003).

Desafortunadamente las concepciones de los alumnos sobre el signo igual interfieren con su habilidad para comprender las igualdades por lo que previa o conjuntamente se hace necesario favorecer el desarrollo de dicha comprensión (Carpenter et al., 2003; Molina y Ambrose, pendiente de aceptación).

Relaciones aritméticas. Centrándonos en las operaciones de la estructura aditiva y en el conjunto de los números naturales, identificamos nueve relaciones que pueden trabajarse desde la resolución de igualdades numéricas con soluciones en el conjunto de los números naturales. Dichas relaciones delimitan el foco de atención en nuestra intervención en el aula al ser empleadas en el diseño de las igualdades que componen las actividades. En la Tabla 1 se enuncian dichas relaciones acompañadas de ejemplos de igualdades mediante las cuales se pueden trabajar en el aula. La última relación incluida en la Tabla 1, *magnitud*, comprende relaciones aritméticas basadas en la magnitud de los números involucrados y el conocimiento de las operaciones suma y resta.

Tabla 1: Relaciones aritméticas en el contexto de las igualdades numéricas.

Relación	**Ejemplos de igualdades V/F o abiertas**
Operación conmutativa de la suma (a + b = b + a)	12 + 11 = 11 + 12 12 + 7 = 7 +
No conmutatividad de la resta	24 – 15 = 15 – 24
Cero elemento neutro	24 – 24 = 0 9 – = 0
A – a = 0	100 – 100 = 1 100 – = 0
Compensación a + b = (a – 1) + (b + 1) a + b = (a + 1) + (b – 1) a – b = (a –1) – (b – 1) a – b = (a + 1) – (b + 1)	51 + 51 = 50 + 52 8 + 5 = + 7
Relación complementaria de la suma y la resta a + b – b = a a – b + b = a	27 + 48 – 48 = 27 27 + 48 – 48 =
Relaciones de composición y descomposición	24 – 15 = 24 – 10 – 5 7 + + 6 = 14 + 6
Magnitud	75 – 14 = 340 7 + 15 = 8 + 15
Propiedad reflexiva de la igualdad	3 = 3 12 + 12 = 12 + 12

Antecedentes

En relación con el uso y desarrollo de pensamiento relacional diversos autores documentan la falta de conocimientos de los alumnos de Educación Primaria y

Secundaria sobre la estructura que subyace a las expresiones aritméticas y sus propiedades (Liebenberg, Sasman y Olivier, 1999; Kieran, 1989). Observan la falta de capacidad de los alumnos de resolver igualdades sin calcular la respuesta así como la no aceptación de la falta de clausura.

Trabajos relativos al uso y desarrollo de pensamiento relacional señalan la bondad de las estrategias de pensamiento y cálculo flexible para favorecer el aprendizaje, la retención y la transferencia de conocimiento sobre el cálculo (Myers y Thorton, 1977; Thorton, 1978; Gómez, 2005). En particular Myers y Thorton (1977) observan que los niños que resuelven correctamente un mayor número de hechos numéricos tienden a descubrir y usar relaciones entre hechos numéricos más sencillos, y los alumnos con peores resultados o con dificultades de aprendizaje, no lo hacen.

Dentro de la propuesta Early-Algebra, trabajos de Carpenter et al. (2003) y Koehler (2004) dan muestras de la capacidad de los alumnos de los primeros cursos de Educación Primaria para pensar sobre relaciones sofisticadas y expresarlas de incluso de forma simbólica.

Nuestro estudio previo (Molina, 2004; Molina y Castro, 2005; Molina y Ambrose, pendiente de aceptación) confirma dicha capacidad por parte de los alumnos de tercero de Primaria y da muestras de la bondad del trabajo con igualdades numéricas verdaderas y falsas, basadas en relaciones y propiedades aritméticas básicas, en el que se da prioridad a la discusión y explicación de lo realizado por parte de los alumnos, para favorecer el uso y desarrollo de pensamiento relacional. Las discusiones conducen a los alumnos a evaluar su pensamiento y el de sus compañeros y favorecen la organización y consolidación de su pensamiento matemático al tener que explicarlo.

Del desempeño de los estudiantes ante las distintas tareas, deducimos que la forma de los distintos tipos de igualdades influye especialmente en el modo de abordarlas por parte de los escolares. En las igualdades abiertas los alumnos tienden a realizar los cálculos y a no considerar la totalidad de la igualdad, en cambio en las igualdades verdaderas y falsas les resulta más sencillo apreciar esta totalidad y utilizar pensamiento relacional. Más de la mitad de los alumnos dan evidencias del uso de pensamiento relacional, sin embargo dichas manifestaciones son poco frecuentes debido a la limitada comprensión del signo igual de los alumnos y a su fuerte tendencia computacional.

Objetivos de la Investigación

Este trabajo forma parte de una investigación en la que se pretende indagar en un proceso de enseñanza/aprendizaje y tratar de analizar lo qué ocurre y cómo ocurre. Dicho proceso consiste en el trabajo con igualdades numéricas basadas en relaciones aritméticas básicas, mediante una metodología de trabajo en el aula centrada en la discusión de las respuestas y estrategias de los alumnos. Nuestro interés se centra en el estudio del uso y desarrollo de pensamiento relacional como estrategia para la resolución de igualdades numéricas, del modo en que lo manifiestan los alumnos y las relaciones aritméticas en las que se apoyan. En esta comunicación recogemos los primeros resultados del análisis del uso y desarrollo de pensamiento relacional.

Metodología

La metodología de investigación aplicada en este estudio se ubica dentro de las metodologías propias de las investigaciones de diseño, un paradigma emergente que actualmente está siendo activamente aplicado y desarrollado dentro de la investigación educativa. Este paradigma persigue analizar el aprendizaje en contexto, mediante el diseño y estudio sistemático de estrategias y herramientas de enseñanza. El diseño se considera central para promover el aprendizaje, crear conocimiento útil, y hacer progresar las teorías de aprendizaje y enseñanza en ambientes complejos (DBRC, 2003).

Los estudios de diseño son un tipo de experimentos de enseñanza cuyo objetivo es producir teoría, que ayude a guiar la práctica educativa en el aula y a identificar prácticas de enseñanza-aprendizaje eficaces, permitiendo adaptar las condiciones de la enseñanza para afectar la probabilidad de ciertos resultados o sucesos (Confrey, en prensa).

Los estudios de diseño constituyen extensas investigaciones de prácticas educativas provocadas por el uso de un conjunto de tareas curriculares noveles, cuidadosamente secuenciadas, que estudian como algún campo conceptual o conjunto de habilidades e ideas son aprendidas mediante la interacción de los alumnos bajo la guía del profesor. Este tipo de estudios tratan de documentar "*qué recursos y conocimiento previo ponen en juego los alumnos en la tarea, cómo interaccionan los alumnos y profesores, cómo son creadas las anotaciones y registros, cómo emergen y evolucionan las concepciones, qué recursos se usan, y cómo es llevada a cabo la enseñanza a lo largo del curso de la instrucción, mediante el estudio de trabajo de los alumnos, grabaciones de videos y evaluaciones de la clase*" (Confrey, en prensa).

Investigación dirigida por una conjetura. El diseño de investigación específico que ha sido aplicado en este trabajo es el "*diseño de investigación dirigido por una conjetura*" de Confrey y Lachance (2000), en el cual se reconocen las características de los experimentos de diseño descritas anteriormente. El punto de partida de este diseño es "*una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes*" (pp. 234-235). No existen hipótesis a ser probadas sino que la conjetura es la guía en el proceso de investigación, siendo revisada y reelaborada a lo largo de dicho proceso.

La conjetura que guía nuestra investigación es que los alumnos de tercero de Primaria son capaces de utilizar estrategias basadas en el uso de pensamiento relacional para resolver igualdades numéricas. Estas estrategias permiten además hacer explícito su conocimiento aritmético. Por otra parte, sabemos, por la literatura existente, que los alumnos de de Educación Primaria, y concretamente de tercero de Primaria, encuentran dificultades en la resolución de igualdades numéricas mostrando cierta tendencia computacional. Conjeturamos que mediante la consideración y discusión de igualdades de variadas formas los alumnos pueden desarrollar su comprensión de las igualdades numéricas, y en especial del signo igual, llegando a entenderlas como expresiones de una relación, y pueden desarrollar pensamiento relacional como estrategia para su resolución.

Recogida de datos

Los sujetos participantes en este estudio son una clase de 26 alumnos de tercero de Primaria, 12 niños y 14 niñas, de un colegio público de la provincia de Granada. La recogida de datos en el aula ha tenido lugar durante un total de seis sesiones realizadas en días diferentes y durante el horario escolar. La primera sesión tuvo lugar dos meses antes de la segunda. Las sesiones segunda, tercera, cuarta y quinta se realizaron con una separación entre ellas de una a dos semanas. La última sesión se realizó en el siguiente curso académico, ocho meses y medio después de la quinta sesión (Ver Tabla 2 para conocer la organización y distribución de las sesiones).

Los resultados de las sesiones previas fueron considerados para el diseño de las sucesivas intervenciones, las cuales pretendían dar un paso más en el estudio y desarrollo de pensamiento relacional y de la comprensión de las igualdades, realizándose un seguimiento a veces global y otras individual.

Sesión	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Fecha	23-11-2004	24-1-2005	3-2-2005	16-2-2005	2-3-2005	16-11-2005
Número de alumnos en clase	26	21	22	25	(13)	25
Duración	30’	1h	1h	1h	1h50’	1h
Actividades realizadas	- actividad escrita -entrevista a 4 alumnos - discusión	- actividad escrita - discusión - actividad escrita - discusión	- discusión	- actividad escrita	- entrevistas individuales	- actividad escrita
Igualdades numéricas empleadas	abiertas	abiertas y V/F	verdaderas y falsas	verdaderas y falsas	verdaderas y falsas	verdaderas y falsas

Tabla 2: Organización y distribución de las sesiones

Como es propio de la metodología utilizada se ha realizado una recogida de datos exhaustiva, que ha permitido capturar con detalle las interacciones ocurridas en el aula, llevándose a cabo evaluaciones individuales para poder valorar el aprendizaje y evolución de cada alumno. Se han realizado grabaciones en video de las tres primeras sesiones, grabaciones en audio de las entrevistas, se han tomado notas de lo ocurrido en el aula y se han recogido las hojas de trabajo de los alumnos. Además, a lo largo del proceso de investigación se han recogido las reflexiones y decisiones tomadas por las investigadoras a partir de cada intervención en el aula, para poder describir con precisión, a posteriori, la evolución de la conjetura de investigación. Todos los datos recogidos son de tipo cualitativo.

Actividades. Como se observa en la tabla 2 se llevaron a cabo discusiones, actividades escritas y se realizaron entrevistas a varios alumnos, todo ello en el contexto de la resolución de igualdades numéricas. Las actividades escritas fueron siempre resultas individualmente, usándose lápiz y los folios distribuidos por las investigadoras. Durante las discusiones participaron mayoritariamente aquellos alumnos que levantaron la mano para hablar. En las discusiones pedimos que los alumnos explicaran distintas formas en las que habían resuelto las igualdades. De este modo se favoreció la participación de un mayor número de alumnos y se hizo explícita la existencia de diversas formas de resolver una misma igualdad y nuestro interés en que los alumnos exploraran y explicaran todas las formas que se les ocurrieran. A partir de la tercera intervención les cuestionamos directamente por formas de resolver las igualdades sin realizar todas las operaciones expresadas.

Igualdades numéricas utilizadas. En cada una de las intervenciones en el aula se emplearon una determinada colección de igualdades, abiertas o verdaderas y falsas, elaboradas en función de los resultados de la sesión anterior, de los objetivos de la sesión en cuestión, de las recomendaciones de Carpenter et al. (2003) y de nuestra experiencia previa (Molina, 2004; Molina y Castro, 2005; Molina y Ambrose, pendiente de aceptación). Además, se tuvo en cuenta el tamaño de los números involucrados, la proporción de igualdades verdaderas y falsas, la posición de la incógnita en las igualdades abiertas y las relaciones aritméticas anteriormente mencionadas.

Análisis de los datos

Como es propio de la metodología utilizada en este estudio, el análisis de los datos recogidos en el transcurso de esta investigación comprende dos etapas: un análisis continuo, tras cada sesión en el aula, y un análisis final. El primero de ellos se refiere al análisis de los datos de cada intervención. Los resultados de este análisis conducen a la toma de decisiones con respecto a futuras intervenciones y facilita la revisión y el desarrollo de la conjetura de investigación. Estos resultados se toman como referencia para la continuación del proceso. El análisis final es el análisis de todo el proceso de investigación y todos los datos recogidos. Este análisis conduce a la construcción de una historia coherente de la evolución de la conjetura y de la evolución de los alumnos a lo largo de la intervención en el aula.

Primeros Resultados

Los resultados obtenidos hasta el momento dan muestras de la capacidad de los alumnos de tercero de Educación Primaria de desarrollar y utilizar pensamiento relacional como estrategia para la resolución de igualdades, confirmando en este sentido los resultados de nuestro estudio previo. Inicialmente, la mayoría de los alumnos muestra la tendencia de realizar el cálculo de las operaciones involucradas en la igualdad aunque algunos alumnos dan muestras puntuales del uso de pensamiento relacional. A partir de la tercera sesión las estrategias basadas en pensamiento relacional son más frecuentes distinguiéndose los siguientes diez tipos:

1. Conmutatividad. Esta estrategia corresponde al uso de la propiedad conmutativa de la suma o una supuesta conmutatividad de la resta en N, en general a la suposición (matemáticamente correcta en el caso de la suma) de que el orden de los términos no influye en el resultado o valor de una expresión aritmética. En particular, identificamos el uso de esta estrategia en las siguientes explicaciones de los alumnos: "[75 + 23 = 23 + 75] *Verdadera porque en la suma no importa cambiar el orden*", "[18 – 7 = 7 – 18] *Verdadera porque los números son iguales pero están puestos de otra forma*".

2. Restricción en el dominio de la operación. Esta estrategia corresponde al uso de la suposición (matemáticamente correcta en el caso de la resta) de que, dentro del conjunto de los números naturales, sólo es posible operar dos números cuando el primero es mayor que el segundo. Son ejemplos del uso de esta estrategia las siguientes explicaciones: "[75 + 23 = 23 + 75] *Falsa porque 75 más 23 da 98 y a 23 no le puedes sumar 75*" y "[18 – 7 = 7 – 18] *Falsa porque 18 – 7 son 11 y a 7 no le puedes quitar 18*".

3. Composición-descomposición. Esta estrategia corresponde al uso de relaciones que permiten obtener un término a partir de la agrupación o composición de otros dos términos, o inversamente, a partir de la descomposición de un término en otros dos. Esta estrategia se manifiesta en igualdades en las que ambos miembros incluyen uno o más términos iguales, lo que favorece la comparación de los demás términos involucrados en la igualdad. Son ejemplos del uso de esta estrategia las siguientes explicaciones "[257 – 34 = 257 – 30 – 4] *Verdadera porque a 30 le sumas 4 te da 34 y son los mismos números*", "[257 – 34 = 257 – 30 – 4] *Verdadera porque es la misma sólo han puesto más números para res*tar", "[6 + 4 + 18 = 10 + 18] *Verdadera porque es lo mismo sólo que han puesto otros números*".

4. Compensación. Esta estrategia corresponde al uso de la relación de compensación de la suma o de la resta. En el caso de la suma esta relación consiste en que la suma no varía cuando un mismo número es sumado a uno de los sumandos y restado al otro sumando. La siguiente explicación es un ejemplo del uso de esta estrategia "[53 + 41 = 54 + 40] *Verdadera porque el 1 del 54 se lo ponemos al 40 te da lo mismo*".

En el caso de la resta esta relación consiste en que la resta no varía si un mismo número es sumado o restado a ambos términos de la operación. Por ejemplo, se distingue el uso de esta estrategia en las siguientes explicaciones: "[19 – 13 = 9 – 3] *Porque... porque... a... si a diecinueve le quitamos trece es igual que como si le quitáramos los unos*", "[17 – 12 = 16 – 11] *Verdadera porque a 17 le restamos 12 y nos da 5 y a un número menor que* *el diecisiete le restamos un número menor que el 12 nos da lo mismo*".

5. *Complementariedad de la suma y la resta.* Esta estrategia consiste en el uso de la relación de complementariedad existente, por definición, entre las operaciones suma y resta; lo que permite la cancelación de dos términos cuando un mismo número es sumado y restado. Un ejemplo del uso de este tipo de estrategia es la siguiente explicación: "[16 + 14 – 14 = 36] *Falsa porque 16 + 14 – 14 son 16 porque le quitamos y le ponemos a los números"*

6. Mismidad. Esta estrategia se basa en la observación de la repetición de términos y la suposición de que toda igualdad que involucra términos iguales es verdadera. Son ejemplos las siguientes explicaciones: "[53 + 41 = 54 + 40] *Falsa porque 53 no es igual a 54 y 41 no da lo mismo que 40*", "[75 + 23 = 23 + 75] *Verdadera porque son iguales y entonces dan lo mismo*", "[18 – 7 = 7 – 18 *Verdadera porque dieciocho menos 7 y el otro es lo mismo y si es lo mismo da igual".* Como podemos ver en los dos últimos ejemplos esta estrategia puede corresponder en algunos casos con la aplicación de la propiedad conmutativa de la suma o una supuesta conmutatividad de la resta, sin embargo, diferenciamos ambos tipos de estrategias según los alumnos hagan referencia al cambio de orden o únicamente a la mismidad de los términos.

7. Similitud de estructura[2]. Esta estrategia consiste en la observación y uso de un patrón o cierta similitud en la estructura de las expresiones que componen la igualdad. Un ejemplo lo observamos en la explicación de una alumna a su respuesta 7 en la igualdad 17 - □ = 18 – 8: "*Como 18 luego hay un ocho pues me ha salido*". Esta alumna utiliza estrategias de cálculo para dar respuesta a las demás igualdades abiertas de la actividad,

---

[2] Al igual que Kieran (1989) denominamos estructura de una igualdad a la forma o disposición de los términos y operaciones, sujeta a las restricciones del orden de las operaciones.

haciendo uso de un significado operacional del signo igual, sin embargo, en esta igualdad aprecia cierta similitud entre la estructura de las expresiones 17 – 7 y 18 – 8 que le permite obtener la respuesta.

8. Magnitud. Esta estrategia refiere a los casos en los que los alumnos obtienen su respuesta a partir de la comparación de la magnitud de los términos involucrados en la igualdad y su conocimiento del efecto de las operaciones suma y resta en el conjunto de los números naturales. Dentro de este tipo de estrategias distinguimos entre:

8.1 Efecto suma: cuando la estrategia se basa en el uso de conocimiento sobre el efecto de la operación suma sobre un número (Ej. "[37 + 22 = 300] *Porque… porque treinta y siete más, porque treinta y siete más veintidós,… porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor"*).

8.2 Efecto suma-no compensación: cuando la estrategia se basa en la apreciación de un cambio o una diferencia de magnitud entre los términos que no está compensada (Ej. "[7 + 15 = 8 + 15 *Falsa porque 7 + 15 son 22 pero 8 + 15 son 23 porque a 7 le han puesto una más*").

8.3 Efecto-resta: cuando la estrategia se basa en el uso de conocimiento sobre el efecto de la operación resta sobre un número (Ej. "[75 – 14 = 340] *Falsa porque 75 – 14 son 61 y además si a 75 le restamos más no puede salir 340",* "[37 + 22 = 300] *Porque… porque treinta y siete más, porque treinta y siete más veintidós,… porque treinta y siete más veintidós no te dan trescientos porque trescientos es un número más mayor*").

9. Cero como elemento neutro. Esta estrategia se basa en el uso de las propiedades del cero como elemento neutro de la suma (a + 0 = a y 0 + a = a) y elemento neutro de la resta por la derecha (a – 0 = a). Por ejemplo en la igualdad 23 + 0 = 23 una alumna justifica la veracidad de la igualdad explicando "*Porque veintitrés más cero igual a veintitrés, porque si a veintitrés no le sumamos nada es veintitrés*". Esta alumna asocia el cero con "nada" y esto le permite concluir la veracidad de la igualdad sin necesidad de realizar ningún cálculo.

10. a – a = 0 . Esta estrategia se basa en el uso de la relación aritmética a – a = 0 siendo "a" un número natural. Esta estrategia es expresada por una alumna en la igualdad 125 – 125 = 13 explicando "*Falsa, porque a ciento veinticinco le quitas ciento veinticinco son cero, no trece […] Porque aquí son los mismos números y si le quitas los mismos números son cero, aquí no te puede dar trece*".

Estas diez estrategias se consideran basadas en pensamiento relacional porque en cada una de ellas el alumno considera la igualdad como una totalidad, examina los términos que la componen, busca relaciones entre ellos (guiado por su comprensión de dicha igualdad) y utiliza dichas relaciones para resolver la igualdad. Las relaciones observadas entre los términos son las que le permiten obtener la respuesta, evitando la realización de los cálculos expresados en la igualdad.

Estrategias de cálculo. En la mayoría de las igualdades propuestas los alumnos manifiestan también el uso de estrategias de cálculo mostrando ser capaces de encontrar sumandos o substraendos desconocidos en igualdades numéricas. Para realizar dichos cálculos los alumnos emplean los algoritmos estándares de la suma o la resta, hacen uso de estrategias de conteo (apoyándose en el uso de los dedos en casos puntuales), utilizan el recuerdo de hechos numéricos, y hacen uso de su sentido numérico relacionando las operaciones de suma y resta o derivando un hecho numérico de otros hechos que conoce. Algunas de las explicaciones que evidencian el uso de estas estrategias son las siguientes:

- "[6 + 4 + 18 = 10 + 18] *Verdadera porque diez más ocho son veintidós y dieciocho más diez es veintidós",*
- "[7 + 3 = 10 + 3] *siete más tres son… diez […] Y a diez le quito…a diez le he quitado el cero y le he puesto el tres, y me ha salido trece. Y no es igual".*
- "[17 – 12 = 16 – 11] *Verdadera porque he hecho una cuenta y otra cuenta y me ha salido lo mismo",*
- Explicación de una alumna a su respuesta 15 en la igualdad 14 – 9 = ☐ – 1: *"He restado a catorce nueve y luego me ha salido seis he ido contando seis más diez y me ha salido quince"*

Para aportar explicaciones diferentes a las de sus compañeros algunos alumnos expresan las operaciones en distinto orden del que aparecen expresadas en la igualdad, y en otros casos recurren a formas diferentes de realizar las mismas operaciones, por ejemplo resolviendo una resta a partir de una suma.

Construcción de igualdades. Ambos tipos de explicaciones, de pensamiento relacional y de cálculo, también se hacen manifiestas cuando los alumnos construyen sus propias igualdades. Se identifica el uso de estrategias de cálculo en la construcción de una igualdad cuando es necesario calcular el valor numérico de ambos miembros para comprobar si es verdadera o falsa, no siendo posible deducir la igualdad de los miembros a partir del uso de una relación o propiedad aritmética básica (Ej. 15 – 3 = 8 + 4 y 8 + 3 = 13 – 2).

En cambio se identifica el uso de estrategias de pensamiento relacional en la construcción de una igualdad cuando se puede afirmar su veracidad o falsedad mediante el uso de pensamiento relacional, sin necesidad de operar para calcular el valor numérico de sus miembros (Ej. 1.000 + 2.000 = 1.000 + 2.000 y 40 – 10 = 40 – 50). Entendemos que en estos casos el alumno ha recurrido a su conocimiento de la estructura de la aritmética para construir la igualdad.

En las igualdades verdaderas y falsas construidas por los alumnos, se identifica el uso de las mismas diez estrategias de pensamiento relacional detectadas en la resolución de igualdades[3]: *Conmutatividad* (Ej. $20 + 30 = 30 + 20^{V}$), *Restricción del dominio de la operación* (Ej. $15 - 1 = 15 - 20^{F}$), *Composición-descomposición* (Ej. [4] $100 + 1000 = 1100^{V}$), *Compensación* (Ej. $12 + 4 = 13 + 3^{V}$), *Complementariedad de la suma y la resta* (Ej. $10 + 5 - 10 = 50^{F}$), *Mismidad* (Ej. $19 - 9 = 19 - 9^{V}$), *Similitud de estructura* (Ej. $15 - 15 = 0 - 0^{V}$), *Magnitud* (Ej. $1000 + 1000 = 1^{F}$), *Cero neutro* (Ej. $100 + 0 = 100^{V}$) y *a - a = 0* (Ej. $5 - 5 = 0^{V}$).

Además, se identifican dos estrategias que no se basan en el cálculo ni tampoco en pensamiento relacional. Una de estas estrategias consiste en construir igualdades falsas a partir de igualdades verdaderas modificando únicamente uno de los términos. Por ejemplo a partir de la igualdad verdadera 18 – 8 = 17 – 7 una alumna obtiene la igualdad falsa 18 – 8 = 17 – 14. La otra estrategia consiste en la construcción de igualdades, a

[3] El superíndice V o F indica si estas igualdades fueron propuestas por los alumnos como verdaderas o falsas.

[4] En este ejemplo se reconoce el uso de la estrategia composición-descomposición porque el alumno utiliza la estructura del sistema numérico decimal en la construcción de la igualdad al descomponer 1100 en unidades de distinto orden.

partir de una igualdad dada o construida previamente, alterando la disposición de los términos. Por ejemplo a partir de la igualdad 12 – 4 = 13 + 5 se obtiene la igualdad 4 + 12 = 13 – 5 y 5 + 13 = 4 - 12. Esta estrategia es utilizada bajo la suposición de que las igualdades que están formadas por los mismos términos tienen el mismo carácter de veracidad o falsedad. De este modo algunos alumnos construyen, a partir de una igualdad que saben que es verdadera (falsa), otras que contienen los mismos términos dispuestos de manera diferente, como propuesta de otras igualdades verdaderas (falsas).

Conclusiones

Este trabajo nos permite mostrar parte de la potencialidad de la propuesta Early-Algebra y describir una intervención en el aula en la línea de esta propuesta. En este caso nos centramos en el pensamiento relacional como guía hacia un trabajo aritmético no computacional. Como se ha mostrado, los alumnos de tercero de primaria son capaces de desarrollar y utilizar pensamiento relacional en la resolución de igualdades numéricas. La consideración de igualdades numéricas especialmente diseñadas a partir de relaciones y propiedades aritméticas básicas y el promover el uso de múltiples enfoques para la resolución de las igualdades fueron dos de los elementos clave de nuestra intervención en el aula.

Los distintos tipos de estrategias detectadas en la resolución y construcción de igualdades numéricas por parte de los alumnos muestran el modo en que manifiestan este tipo de pensamiento en este contexto. Estas manifestaciones expresan su comprensión de importantes propiedades aritméticas así como de la estructura de las operaciones; ideas matemáticas fundamentales que habitualmente no son explicitadas en el aula. De este modo la enseñanza de la aritmética es menos computacional y los alumnos desarrollan un aprendizaje semántico de la aritmética tomando conciencia de la estructura que subyace.

Referencias

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Bergen, Vol. 2, pp.135- 142. Bergen University College, Bergen.

Booth, L. R. (1989). A question of structure or a reaction to: “the early learning algebra: a structural perspective”. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* Vol. 4., 57-59, Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates and NCTM.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and Algebra in elementary school.* Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D., Schliemann, A. D., y Brizuela, B. M. (2000). *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions.* Presentación plenaria del PME-NA XXII, Tucson, AZ.

Confrey, J. (en prensa). The evolution of design studies as methodology. A aparecer en R. K. Sawyer, *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*.

Confrey, J., y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly, y R. A. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education.* New Jersey: Lawrence Erlbaum associates.

Davis, R. B. (1964). *Discovery in mathematics: A text for teachers.* Palo Alto, CA: Addison-Wesley.

DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, Vol. 32 (1), 5-8.

Freiman, V., y Lee, L. (2004). Tracking primary students' understanding of the equal sign. En M. Johnsen, y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 415-422. Bergen University College, Bergen.

Gómez, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática 4*, 17 – 29

Grouws, D. A. (1974). Solution methods used in solving addition and subtraction open sentences. *The Arithmetic Teacher* 21, 255-261

Kaput, J. (2000). *Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power By "Algebrafying" the K-12 Curriculum.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a new Algebra. En E. Fennema, y T. A. Rombert (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En A. Grouws, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 390- 419. NY: Macmillan.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: a structural perspective. En S. Wagner, y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Vol. 4, 33- 56. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Koehler, J. L. (2004). *Learning to think relationally: thinking relationally to learn. Dissertation Research Proposal.* University of Wisconsin-Madison.

Lee, L. (en prensa). What is algebra? A aparecer en J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Employing children's natural power to build algebraic reasoning in the context of elementary mathematics*. Disponible en la dirección web http://www.simcalc.umassd.edu/earlyalgebra/EABookChapters.html consultada el 02/01/2004.

Liebenberg, R., Sasman, M., y Olivier, A. (1999). *From Numerical Equivalence To Algebraic Equivalence. Mathematics Learning and Teaching Initiative (MALATI).* V congreso anual de la Asociación de Educación Matemática de Sur África (AMESA), Puerto Elizabeth.

Linvall, C. M. y Ibarra C. G. (1980). Incorrect procedures used by primary grade pupils in solving open addition and subtraction sentences. *Journal for Research in Mathematics Education* 11 (1), 50-62.

Molina, M. (2004). *Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo de pensamiento relacional.* Trabajo de investigación tutelada. Universidad de Granada.

Molina, M., y Ambrose, R. (pendiente de aceptación). From an operational to a relational conception of the equal sign. Thirds graders' developing algebraic thinking.

Molina, M., y Castro E. (2005). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.), *IX simposio de la SEIEM. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática*, pp. 205-213. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la

Universidad de Córdoba y SEIEM.

Myers, A. C., y Thorton, C. A. (1977). The Learning Disabled Child− Learning the Basic Facts. *Arithmetic Teacher* 24, pp. 46-50.

Radford, L. (2000). Signs and Meanings in students emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics* 42, 237- 268.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. Putnam and R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NY.

Thornton, C. A. (1978). Emphasizing thinking strategies in basic fact instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 9* (3), 214-227.

Weaver, J. F. (1972). The Ability of First-, Second-, and Third-Grade Pupils to Identity Open Addition and Subtraction Sentences for Which No Solution Exists Within the Set of Whole Numbers. *School Science and Mathematics* 72, 679-691.