DIFICULTADES EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN UN ENFOQUE ALGEBRAICO

Carlos Oropeza Legorreta, José Isaac Sánchez Guerra y Carlos Oropeza Ugalde
Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán-UNAM México
coropeza96@hotmail.com, joejade@hotmail.com, lambo.r.gini@hotmail.com

Resumen. Nuestro estudio pretende dar a conocer las dificultades que los estudiantes enfrentan al resolver problemas de corte algebraico. En este trabajo se reportan algunas experiencias recopiladas en diversos cursos de álgebra para estudiantes de ingeniería, así como de un taller y un diplomado relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la selección de los problemas se consideraron las recomendaciones vertidas por Polya (1998). Algunos de los resultados obtenidos ponen de manifiesto, que la carencia en el manejo de conceptos básicos de algebra, provoca en la mayoría de los casos que los estudiantes no logren relacionarlos con nuevos conceptos.

Palabras clave: dificultades, problemas algebraicos, estrategias, solución

Abstract. Our study aims to introduce the difficulties that students face up to solve algebraic problems. In this paper we report some experiences collected in several courses about algebra for undergraduate students, as well as a workshop and a diplomat both related with teaching and learning of mathematics. In the selection of problems we are considerate the recommendations made by Polya (1998). Some of the results obtained show that the lack in handling basic concepts of algebra causes in most cases that students fail to relates them with new concepts.

Key words: difficulties, algebraic problems, strategies, solution

Introducción

En las escuelas de ingeniería en México, es común escuchar la opinión tanto de profesores como de estudiantes que los programas de estudio son extensos y atienden con poco énfasis el proceso de construcción de conceptos, análisis, argumentación y creación de ideas, propiciando con ello una visión reduccionista de dichos programas. Al parecer, existe el común denominador de centrar la atención de los cursos en la solución de ejemplos que en su mayoría incluyen soluciones algorítmicas. Ha sido reconocido también que las dificultades de aprendizaje del álgebra son multifactoriales, por ello consideramos que promover la consolidación de fundamentos académicos sólidos pueden ser una oportunidad de desarrollo para los estudiantes de licenciatura. Por otra parte, varias investigaciones sobre álgebra hechas en el marco del PME se han centrado en la manera como los estudiantes enfocan la resolución de ecuaciones. Los enfoques usados se pueden clasificar en tres tipos: a) intuitivo, b) sustitución por tanteo, y c) formal. Los enfoques de resolución intuitivos incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de recuento y métodos de recubrimiento. En cuanto a los problemas verbales de álgebra (caso que nos ocupa en este trabajo), se emplean con cierta regularidad estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, de modo que en ocasiones se emplean los procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta. Mayer (1985) considera que los alumnos pueden trasladar el conocimiento de una estrategia informal a la representación numérica de la ecuación algebraica para encontrar la solución; sin embargo, los procesos de transición resultan difíciles para aquellos (Heffernan y Koedinger, 1997; Mayer, 1982; Nathan, Kintsh y Young, 1992). Toda vez que hemos revisado que los fundamentos algebraicos son necesarios para el desarrollo adecuado de un curso de álgebra en escuelas de ingeniería, nos dimos a la tarea de reflexionar y analizar la manera de cómo poder recobrar evidencias que nos permitan primero fundamentar la necesidad de profundizar nuestro estudio, y segundo poder estructurar diseños de situaciones didácticas que promuevan la solución de problemas desde diversas estrategias, incluida la del uso de tecnología. Nuestro planteamiento inicia con la exploración del tipo de respuestas que los estudiantes hacen al resolver problemas con estructuras verbales y de la caracterización de las dificultades que éstos enfrentan.

Fundamentación

El constructivismo reconoce las aportaciones del conocimiento informal en la construcción del conocimiento matemático. Este conocimiento se considera de manera intuitiva sin un aprendizaje formal; es un resultado de la interacción previa que se forma en contextos no establecidos para el aprendizaje de los principios del álgebra, por lo que el conocimiento informal se debe emplear para desarrollar el conocimiento formal de los aspectos semánticos y sintácticos de álgebra. Por tanto, los alumnos comprenden que los principios de álgebra son resultado del conocimiento humano, y se adquieren en la educación secundaria cuando se comprende la relación entre los conceptos de álgebra, su historia informal y el desarrollo del conocimiento matemático previo a través de la aritmética. Por tanto, la abstracción comienza a construirse cuando el método de un procedimiento se expresa en términos algebraicos $a = b$. Las literales se convierten en una representación simbólica de una función cuyo conocimiento se construye previamente a través de la acción con materiales concretos que facilitan un procesamiento lógico y abstracto, pero las representaciones individuales suelen ser construidas por el mismo alumno con un sentido peculiar debido a su propia experiencia y competencia de aprendizaje. Así, construye el significado de los problemas de álgebra de acuerdo a su comprensión de las relaciones entre los símbolos que suponen una conexión con materiales o entidades concretas.

Connell (1995) encuentra tres orientaciones en la construcción del pensamiento algebraico. La primera implica que los alumnos comienzan usando herramientas parciales para elaborar una herramienta global. La segunda supone que con el uso de la herramienta parcial los alumnos pueden crear y nombrar variables que sustituyen a los objetos; en ese momento surge el que un objeto o evento se puede presentar en una forma arbitraria señalada por una variable. La tercera considera una relación entre los símbolos adquiridos y la solución del problema. Luego entonces, la habilidad para formar alguna representación del problema genera un pensamiento que integra el conocimiento intuitivo con el conocimiento formal. Cuando esto sucede, se afirma que los alumnos llegan a adquirir una comprensión adecuada de los principios de álgebra y de las situaciones del problema que se pueden resolver mediante un procesamiento arbitrario de sus dimensiones, aunque las variables sean desconocidas parcialmente.

La descripción algebraica requiere combinar las herramientas y el pensamiento. Ello puede ocurrir en cinco niveles (Kaput, 1995, 2000): *a)* generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético, *b)* manipulación de formalismos guiada por sintaxis, *c)* estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, *d)* funciones, relaciones y variación conjunta y *e)* modelado de lenguajes. En este sentido, Koedinger, Alibali y Nathan (1999) argumentan que los alumnos realizan una transición de la aritmética al álgebra mediante la representación. Por ende, las representaciones son importantes en las etapas tempranas del desarrollo algebraico. El fracaso de los alumnos en los problemas numéricos de álgebra revela serias dificultades con su sintaxis y semántica, y los errores que cometen aparecen en la comprensión y manipulación de expresiones algebraicas. En cuanto a los problemas verbales de álgebra, se puede afirmar que los alumnos no solucionan estos problemas convirtiéndolos en ecuaciones para luego solucionar la ecuación; en lugar de esto, emplean más a menudo estrategias informales que no involucran símbolos algebraicos, de modo que en ocasiones emplean los procedimientos de ensayo y error para encontrar la respuesta.

La relación de las representaciones informales ocurre en correspondencia con los problemas de álgebra simples, mientras que las representaciones formales mantienen una relación con los problemas de álgebra complejos. Ello significa que a medida que los problemas se hacen más complejos, las estrategias informales tienen limitaciones.

En seguida se caracterizan las 4 fases que Polya (1998) menciona en la resolución de problemas:

1.- Comprensión del problema. La persona que va a solucionar el problema deberá poder separar las principales partes del problema que son, la incógnita, los datos y la condición. Se debe considerar estas partes atentamente, repetidas veces y bajo diversos ángulos. Si hay alguna figura relacionada al problema, se debe *dibujar* y destacar en ella las incógnitas y los datos. Es necesario dar nombres a dichos elementos y por consiguiente *introducir una notación* adecuada.

2. Concepción de un plan. Se tiene un plan cuando se sabe, al menos a "grosso modo", qué cálculos, qué razonamientos o construcciones se habrán de efectuar para encontrar la incógnita. Lo esencial en la solución de un problema es el concebir la idea de un plan.

3. Ejecución del plan. Para lograrlo, hace falta el concurso de toda una serie de circunstancias: conocimientos ya adquiridos, buenos hábitos de pensamiento, concentración, paciencia, etc. Se debe verificar cada paso del plan concebido y asegurarse de su exactitud.

4. Visión retrospectiva. Reconsiderando la solución de un problema, reexaminando el resultado y el camino que condujo a ella, se podrían consolidar los conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver problemas. Es recomendable verificar la solución, especialmente si existe un medio rápido e intuitivo de asegurar la exactitud del resultado o del razonamiento. Al reconsiderar la solución de un problema se presenta la oportunidad de investigar sus relaciones. Polya (1998) menciona también:

> *"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de cada problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto pero si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios, se puede experimentar en cuanto el descubrimiento y el goce del triunfo… por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ello el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello".* (p. 218)

Método

La recopilación de la información es producto de tres puestas en escena de los problemas seleccionados. En dos diplomados impartidos para profesores de bachillerato en la UNAM y un taller impartido en el cuarto Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán. En total se trabajó con aproximadamente 50 profesores. Durante su desarrollo se les solicito la solución en forma individual de tres problemas uno a uno. Se les pidió bosquejar su solución a partir de su propuesta esquematizada; posterior a ello, modelar las ecuaciones y finalmente su solución. Después se pidió la conformación de los diferentes equipos de trabajo para que se discutieran de esta forma sus propuestas y, una vez unificadas sus opiniones, exponer los planteamientos al resto del grupo. Al término de la participación de cada uno de los equipos se dio tiempo para efectuar una retroalimentación a manera de conclusión.

A continuación se muestran algunas imágenes, en las cuales se dan evidencias de los desarrollos analizados, los cuales son la base de la exploración que hemos realizado. Los problemas que se plantearon fueron tomados de Perelman (1978) y se muestran las soluciones propuestas a algunos de ellos por uno de los profesores participantes en el taller antes mencionado.

Problema 1. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, la una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron y alcanzaron el pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez? Suponer que los dos pájaros vuelan a la misma velocidad.

En la siguiente figura se puede ver la propuesta de solución presentada.

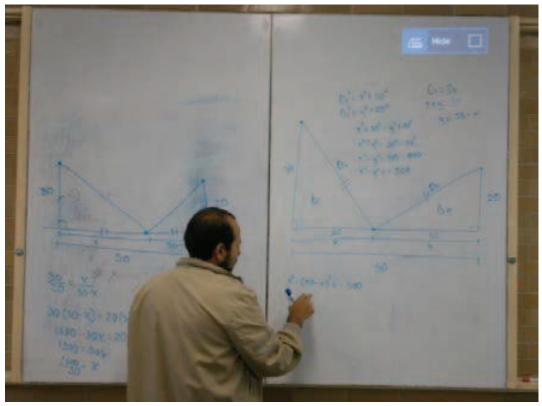

Figura 1. Propuesta de solución al Problema 1.

Se puede apreciar que se comienza con una representación visual del problema, del cual se derivan desarrollos algebraicos con los cuales se llega a la solución.

Problema 2. Un artel de segadores debía segar dos prados, uno tenía el doble de superficie que el otro. Durante medio día trabajó todo el personal del artel en el prado grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en el prado grande; y la otra mitad trabajó en el pequeño. Durante esa tarde fueron terminados los dos tajos, a excepción de un reducido sector del prado pequeño, cuya siega ocupó el día siguiente completo a un solo segador. ¿Con cuántos segadores contaba el artel?

La siguiente figura muestra una propuesta de solución.

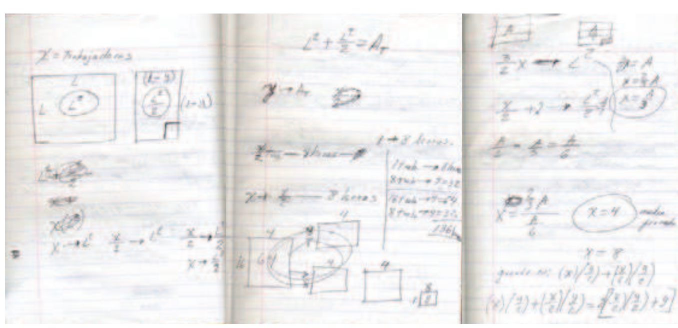

Figura 2. Propuesta de solución al Problema 2.

En este caso se propone más de una representación tanto visual como algebraicamente, viendo el problema desde distintos puntos de vista. Cada representación aporta de manera significativa evidencias para llegar a la solución.

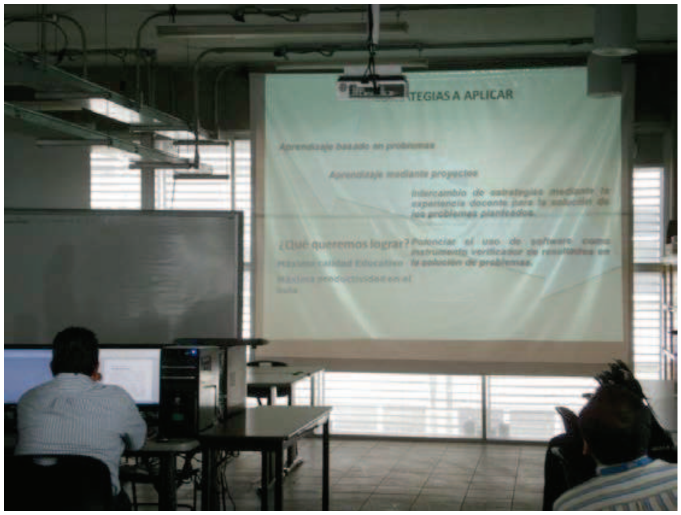

Figura 3. Objetivos y propuesta metodológica implementada por participantes.

En la figura 3 se puede apreciar el planteamiento de solución de manera resumida por un equipo participante en el diplomado impartido para profesores de nivel bachillerato. Es necesario mencionar que la propuesta se estructuró después de haber vivenciado un trabajo en equipo y consensado una solución a los problemas planteados.

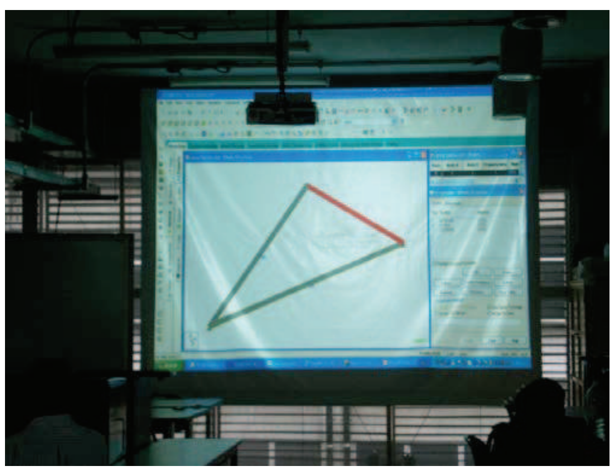

Figura 4. Uso del software como un instrumento verificador de resultados.

Cabe señalar que la puesta en escena de las actividades preparadas para el taller impartido incluye la propuesta del uso de software matemático para la verificación de los resultados (figura 4) obtenidos de manera analítica, por lo que en los comentarios siguientes de algunos profesores participantes en estas actividades se menciona esta situación.

Por otro lado queremos declarar que por motivos de espacio ya no fue posible incluir mayor número de imágenes para continuar con nuestra explicación. También se dejarán abiertas interrogantes con la intención de que los estudiantes reflexionen sobre los tan socorridos métodos mecanicistas. Esto sin dejar de lado lo relevante que resulta hacer un uso adecuado del álgebra.

Hasta el momento continuamos realizando algunas modificaciones en cuanto a las condiciones en que los grupos de trabajo resuelven los problemas: tiempo de resolución, número de integrantes, apoyos a los cuestionamientos que hacen durante la actividad, etc.

Consideraciones finales

Actualmente estamos conscientes que hace falta consolidar y tener mayor precisión en la estructura de nuestro trabajo. Sin embargo, con la participación en esta modalidad estamos seguros de encontrar una serie de recomendaciones que utilizaremos para retroalimentar nuestro trabajo.

Por otra parte se vuelve necesario y sumamente relevante enfatizar en la fortaleza que puede alcanzar un alumno, al potenciar racionalmente sus fundamentos algebraicos.

Las matemáticas implican, por tanto, estructuras y relaciones que deben manifestarse a partir de experiencias concretas. Las tareas del aprendizaje de las matemáticas involucran innumerables componentes que tienen su origen en la jerarquía de la experiencia y en cada una de las etapas del desarrollo psicomotor del pensamiento cuantitativo.

Referencias bibliográficas

Connell, M.L. (1995). *A constructivist use of technology in pre-algebra.* Paper presented at the Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, October 21-24.

Heffernan, N. y Koedinger, K.R. (1997). The composition effect in symbolizing: therole of symbol production vs. text comprehension. En M. G. Shafto y P. Langley (Eds.): *Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 307-312)

Kaput, J. (1995). *A research base suppporting long term algebra reform?* Paper Presented at the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH, October 21-24.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Arlington, VA: National Science Foundation.

Koedinger, K.R., Alibali, M.W. y Nathan, M.J. (1999). *A developmental model of algebra problem solving: trade-offs between grounded and abstract representations*. Paper presented at the Annual Conference for American Educational Research Association. Montreal, May 23-26.

Mayer, R. (1982). Different problem-solving strategies for algebra word and equation problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 8*, 448-462.

Mayer, R. (1985). Mathematical ability. En R. J. Sternberg (Ed.): *Human abilities: An information processing approach* (pp. 127-150). New York: Freeman.

Nathan, M.J., Kinstch, W. y Young, E. (1992). A theory of algebra word problema comprehension and its implications for the design of computer learning environments. *Cognition and Instruction, 9*, 329-389.

Perelman, Y. (1978). *Álgebra recreativa*. Moscú: Ed. Mir.

Polya. G, (1998). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Ed. Trillas.