

PARADOXO DE ZENÃO: DIFERENTES INTERPRETAÇÕES PARA UMA COMPREENSÃO CONSTRUTIVA

Lúcia Cristina Silveira Monteiro
Universidade Federal de Alagoas
lucia.csmonteiro@uol.com.br

Brasil

Resumen. Nesse trabalho será apresentada uma investigação teórico/filosófica acerca de um problema encontrado na história da matemática, conhecido como paradoxo de Zenão. Serão versadas diferentes interpretações desde a mais antiga e outras, incluindo: lógica, poesia, linguagem matemática atual, uma interpretação do ponto de vista físico, e, interpretações inéditas do problema. Para análise e construção das propostas foram utilizadas a noção de complementaridade nas ciências e o conceito de criatividade. Concluímos que problemas desse tipo aparentam ser excelentes ferramentas para compreensão construtiva dos conceitos implícitos e explícitos envolvidos nessas interpretações.

Palabras clave: paradoxo de Zenão, pensamento recursivo, complementaridade, novos problemas

Abstract. In this work we present an investigation theoretical / philosophical about a problem encountered in the history of mathematics, known as Zeno's paradox. Be versed different interpretations since the earliest and others, including: logic, poetry, current mathematical language, an interpretation of the physical point of view and unpublished interpretations of the problem. For analysis and construction tenders were used the notion of complementarity in science and the concept of creativity. We conclude that such problems appear to be excellent tools for constructive understanding of implicit and explicit concepts involved in these interpretations.

Key words: paradox of Zeno, recursive thinking, complementarity, new problems

Introdução

Esse trabalho é um projeto para a construção da tese de Doutorado do programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo, sob orientação do professor pesquisador Dr. Michael Friedrich Otte, com foco nas interpretações do paradoxo de Zenão. Nessa investigação identificamos diferentes compreensões desse paradoxo, encontradas na história antiga e recente.

Uma preocupação fundamental na Educação Matemática é com os objetivos a que devem alcançar essa ciência, na formação do indivíduo. A Educação Matemática deve voltar-se para a resolução de problemas? Para compreensão das estruturas de seus objetos? Para compreensão de relações entre objetos e/ou fenômenos? Para percepção de objetos Matemáticos ao nosso redor? Para o desenvolvimento do pensamento científico? Para promover desenvolvimento humano? Para aprender a pensar logicamente? Para o exercício do pensar analítico? Como desvendar essa natureza da Educação Matemática através da Educação Matemática?

Muitos direcionamentos podem ser explorados à busca da compreensão acerca do - a que deve servir a Educação matemática. Todas as questões citadas acima, sob algum aspecto, estão relacionadas aos processos de desenvolvimento da Matemática. Precisamos identificar quais questões não podem deixar de ser consideradas quanto aos direcionamentos para a Educação Matemática.

As perguntas sem respostas, os problemas que incitam diferentes interpretações e que fazem parte das motivações que levaram e levam ao desenvolvimento de novos conhecimentos científicos e que revelam a natureza do pensamento matemático são excluídos da maioria das abordagens no ensino de matemática. Nesse trabalho a partir das interpretações sobre o problema de Zenão, problema fundamental para as reflexões sobre o processo de desenvolvimento da matemática, desde a Grécia antiga, e que continua instigando reflexões, buscaremos compreender como esse tipo de problema pode ajudar a revelar através da Educação Matemática, a natureza do conhecimento matemático.

O paradoxo de Zenão: diferentes interpretações

As primeiras argumentações que conhecemos a respeito da obra de Zenão são, segundo Otte (2003), devido a Aristóteles que as expôs a fim de refutá-las. Com referência ao livro de Aristóteles, o núcleo do paradoxo de Zenão é a ideia de que, para Aquiles recuperar o atraso com a tartaruga, deve primeiro realizar um número infinito de atos. O problema, à descrição da época, aparece apresentado da seguinte forma: suponhamos que Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga e lhe dá cem unidades de medidas à frente antes de iniciar uma corrida. A fim de ganhar, Aquiles deve primeiro compensar o seu espaço inicial, ou seja, a vantagem de cem unidades dada à tartaruga, mas quando ele faz isso e chega ao ponto onde a tartaruga começou, essa, teve tempo para avançar dez unidades. Novamente, enquanto Aquiles corre mais dez unidades, a tartaruga avança uma unidade adiante, depois, Aquiles corre uma unidade e a tartaruga avança um décimo da unidade, e assim por diante, sem fim.

Outra interpretação encontrada na antiguidade para o mesmo paradoxo diz - antes que se cubra o espaço entre dois pontos tem-se que cobrir a metade desse espaço, e antes a metade da metade desse espaço, e assim sucessivamente, criando-se a ideia de que não seria possível sair do ponto. Nesse sentido, o problema de Zenão é colocado como um paradoxo do movimento.

Aristóteles negou a possibilidade do problema de Zenão ser um paradoxo em razão da sua concepção sobre *continuidade ininterrupta do movimento como um todo*. Para Aristóteles, assim como para Platão, matéria e espaço é a mesma coisa, portanto, nem espaço nem o contínuo são considerados como um objeto, e, espaço ou tempo é uma relação. Aristóteles não admitia ser possível analisar o movimento em *pedaços*, de forma discreta, como propõe essas primeiras interpretações do problema.

Mais tarde Galileu interpreta esse movimento em termos de duas séries de intervalos correspondentes nas escalas de tempo e distância, e atualmente, um passo essencial dado pela

Matemática é uma sintetização dessas correspondências que são tratadas como um objeto matemático, no caso, uma fórmula algébrica.

A interpretação matemática atual com maior destaque é através da convergência de uma série geométrica infinita. Esse modelo representa uma *fórmula para solucionar* o paradoxo, mas muitos discordam dessa compreensão unilateral, visando unicamente um resultado.

Uma interpretação física do problema dada por Otte (2012), adota um ponto de vista relacional, entendendo que se Aquiles corre dez vezes mais rápido que a tartaruga, embora a tartaruga esteja uma unidade à frente, para as fases seguintes, para cada distância x ($x > 0$), percorrida por Aquiles, a tartaruga avança a $f(x) = 1 + x/10$ unidades.

O movimento da tartaruga em relação a Aquiles nos permite reproduzir o paradoxo em um novo nível por causa de seu duplo caráter. O aspecto contínuo do movimento não contradiz a perspectiva discreta.

Esse movimento pode ser interpretado como uma função linear com ambos os movimentos, de Aquiles e da tartaruga, uniformes: $f(x) = ax + b$, isto é, quando Aquiles atinge x , a tartaruga estará em $f(x)$. O problema: em que ponto Aquiles realmente recupera o atraso com a tartaruga, agora é interpretado como, “qual é o ponto fixo de $f(x)$?” o ponto fixo fora pode ser calculado simplesmente como uma função das constantes a e b : resolvendo $x = f(x) = ax + b$, temos, $x = ax + b$. Então, $b/1 - a$. Se considerarmos a $f(x)$ acima, ou seja, $f(x) = 1 + x/10$, temos $a = 1/10$ e $b = 1$. Temos, quando $x = f(x)$, $x = 10/9$. Verificando no Geogebra a representação da intersecção das retas $f(x) = x$, e, $f(x) = ax + b$, acontece no ponto $(1,11 ; 1,11)$, em uma aproximação para duas casas decimais, pois sabemos que $\frac{10}{9}$, é uma dízima periódica. Outros autores, em diferentes áreas, apresentam interpretações da ideia fundamental do argumento de Zenão com foco principal no pensamento recursivo, ou seja, a repetição ininterrupta de um padrão conhecido, inerente a compreensão do problema. Por exemplo, Borges (2008) e Borges (2009), respectivamente nas suas obras *o aleph* e *o livro de areia* apresenta apelo ao pensamento recursivo para expressar suas ideias. Em *o aleph*, Borges se refere a um baú em um porão que contém todo o universo. Nessa exposição, ele faz uma analogia com a correspondência de pontos existentes em um espaço finito com os pontos encontrados em um espaço infinito. O espaço finito é o interior do baú, preenchido de artefatos. Ele menciona o fato de que o universo todo tem pontos correspondentes dentro do baú. No livro de areia, Borges cria a possibilidade da existência de um livro com infinitas páginas idealizando o livro como um sólido composto por infinitos planos. Nas duas situações, Borges atenta para o fato de que a transferência da ideia

matemática para artefatos humanos, degenera para pensamentos considerados incompreensíveis nos estados de lucidez humana, sugerindo que a busca das tais impossibilidades podem levar à devaneios sem lógica.

Ryle (1993), na sua obra *Dilemas*, aponta diferenças existentes nesse raciocínio recursivo, quando é aplicada em diferentes situações, como por exemplo, em um computador, subordinado a um programa que leve a um padrão de repetição, numa corrida como a de Aquiles e a Tartaruga, ou na subdivisão de um bolo com seu volume conhecido. No tratamento dado ao paradoxo no diálogo - *O que a Tartaruga disse para Aquiles*, ao fazer uma análise na perspectiva da lógica pura, Carroll (1895) em sua publicação afirma que mesmo o mais perfeito sistema de axiomas não são suficientes para determinar a verdade de um sistema da lógica. Para esse argumento ele usa a proposição de Euclides, dizendo: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma mesma coisa; (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. Muitos concordam que (Z) segue logicamente de (A) e (B). Carroll questiona sobre a possibilidade de um leitor que ainda não aceitou (A) e (B) como verdade, aceitar uma sequência de proposições como validade. E, em uma tentativa de convencer logicamente esse outro tipo de leitor, Aquiles, nesse diálogo construído por Carroll, diria para a tartaruga: agora eu vou escrever como eu dito: (A) coisas que são iguais a mesma coisa são iguais entre si; (B) os dois lados de um triângulo são iguais a uma mesma coisa; (C) se A e B são verdade Z deve ser verdade. (Z) Os dois lados de um triângulo são iguais. A tartaruga diz: eu posso aceitar A, B e C como verdade e não aceitar Z, posso não? Você pode, Aquiles admitiu, ainda que o evento seja possível, mas eu posso acrescentar mais uma proposição, (D) se A e B e C são verdade, Z deve ser verdade.

Otte explica que o ponto de partida deste problema é o pressuposto de que toda proposição implica imediatamente em si própria. Se eu digo p é verdadeiro, isto significa p é verdadeiro. Nada é adicionado à proposição p pelas palavras *é verdade*. Nada é adicionado para provar afirmando que a proposição está correta. Caso contrário, entrará em regressão infinita e ficará presa à argumentação de Zenão.

Aqui nesse trabalho buscaremos respaldo na literatura científica para propor que a compreensão dos diferentes pontos de vista deve ser considerada, objetivando construir uma abordagem construtiva através da complementaridade das interpretações do problema.

Complementaridade

A noção de complementaridade tem sido usada em Matemática e em outros campos da Ciência, visando reter aspectos essenciais do desenvolvimento cognitivo e epistemológico dos conceitos científicos e matemáticos. Uma atitude complementarista, afirma Otte (2003) é consequência da

impossibilidade de definir a realidade matemática se a considerarmos como sendo independente da atividade do conhecimento em si. “[...] A prática matemática, que tem progressivamente se libertado de esquemas metafísicos e ontológicos desde Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementarista – talvez mais do que qualquer campo de conhecimento a fim de que seja adequadamente compreendida.” (OTTE, 2003, p.204)

Ao tentar explicar o conceito de complementaridade, Otte (2003) o resume como sendo a perseguição e explicação de um fenômeno universal ou geral em suas manifestações particulares e aponta que, dessa forma é possível conceber a polaridade entre aritmética e geometria como uma primeira visualização da ideia de complementaridade na Matemática. Em sua explicação, expõe uma distinção entre dualidade e complementaridade destacando o papel da atividade na relação entre sujeito e objeto do conhecimento, dizendo que,

Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto se diferencia do outro como o abrange, então, é preciso, colocando a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva. Esta dinâmica fundamenta-se exatamente na complementaridade entre os meios e os objetos do conhecimento [...] (Otte, 2003, p.224).

Nessa dinâmica entre o sujeito, objeto e atividade destacam-se também aspectos implícitos a essa dinâmica, como a *criação*, pois, “o ser humano, em cada ação efetiva, vê algo real e, em cada percepção de formas, vê algo ilusório. Ambos os aspectos, no entanto, são complementares e ocorrem em cada atividade criativa” (Otte, 1993, p. 234).

Criatividade, problemas e representações

Vygotsky esclarece que atividade de imaginação criativa se completa pela cristalização da imagem em uma forma externa e afirma que a atividade criativa da imaginação depende primariamente de quão rica e variada é a experiência prévia que a pessoa armazenou no seu cérebro. Ele considera que essa atividade é uma função vitalmente necessária.

Otte (1993) afirma que o processo criativo opera na interação entre variação e repetição. Uma teoria sendo uma interpretação de um fenômeno é também um processo de criar uma interpretação da interpretação dada, e assim por diante.

Construção de variações e repetições da ideia de Zenão

Buscando refletir sobre uma ação efetiva e formas que representem o paradoxo de Zenão para construirmos abordagens complementares e buscarmos despertar realidade e imaginação, enveredaremos por uma aventura na construção de problemas usando noções intrínsecas ao paradoxo de Zenão, que envolvam ação e percepção em diferentes contextos, tomando como base o pensamento recursivo à divisão de um objeto matemático sempre reduzido a metade.

Problema 1: tomemos uma superfície retangular e a dividamos por dois. Teremos uma nova superfície com a metade da área da primeira. Tomemos a nova superfície e novamente a dividamos à metade, e repitamos o processo indefinidamente. Qual a soma dessas áreas divididas à metade? Que noções matemáticas surgem ao interpretarmos cada um dos problemas?

Outra interpretação diante da mesma configuração sugere a abordagem do *Problema 2:* Podemos observar o *problema 1* e perguntarmos: e se juntarmos todos esses pedaços continuamente, e analisarmos, comparando o contorno das duas figuras, ou seja, o contorno ou perímetro, da primeira superfície retangular tomada e o contorno ou perímetro da superfície gerada pela junção dos pedaços da área subdividida, a que conclusão poderíamos chegar?

Problema 3: Considerando esse mesmo problema anterior, o *problema 2*, em que o perímetro tende ao infinito, e colocando-o em um contexto significativo, por exemplo: Se a superfície quadrilátera do *problema 2* fosse uma obra pictórica, construída em pedaços, seria possível percorrer toda parede de uma sala retangular com perímetro conhecido, subdividindo essa obra, sempre em sua metade? Quais seriam as dimensões das menores telas?

Problema 4: Como representar um conjunto de polígonos cujas metades não existem?

Problema 5: Se as subdivisões dos problemas anteriores fossem colocadas em um software de geometria e aritmética, qual seria a *lógica* na construção do problema?

Que diferentes noções matemáticas são necessárias para construção de possíveis respostas para os problemas citados?

Resultados parciais

Ao se pensar em versões repetidas e ao mesmo tempo variadas de um paradoxo percebemos que se admite uma infinidade de interpretações e representações. Também são admitidas explorações dos conceitos envolvidos na elaboração das interpretações que possam alimentar a compreensão construtiva desses signos/objetos. A cada interpretação dada precisamos estimular ações para que os níveis mais elaborados, concretos e abstratos sejam vislumbrados e assim, em alguns momentos atingidos.

Para os propósitos desse trabalho o destaque é a proposta da construção de outras variações do problema, em diferentes níveis, estimulando a reflexão e conduzindo a *ação criativa*. Para Otte (p.47, 1993), “todo ato criativo, portanto, consiste em ver um A como um B, um martelo como parte de um pêndulo, um movimento como uma função matemática, uma força como um vetor ou justamente a imagem de um cachimbo como um cachimbo”.

Ao destacar a importância da complementaridade entre diferentes interpretações em torno de uma mesma ideia, me aproprio de um comentário de Otte, citando Gregory Bateson (1972) e destaca.

Toda vez que nos orgulhamos de ter encontrado uma nova forma rigorosa de pensamento ou de apresentação, ou toda vez que começamos a enfatizar bastante o “operacionalismo”, a lógica simbólica ou qualquer desses irrecusáveis sistemas de direcionamento, perdemos um pouco da capacidade de pensar novos pensamentos. E, naturalmente toda vez que nos armamos contra o rigorismo estéril do pensamento e apresentação formais e deixamos nossos pensamentos correrem livres, perdemos igualmente. No meu ponto de vista, os progressos do pensamento científico nascem da ligação de um pensamento rigoroso com um pensamento livre, e esta combinação é a ferramenta mais valiosa da ciência (Bateson apud Otte, 1993, p.236).

Assim, salientamos a importância da complementaridade entre diferentes interpretações de um problema que admita conexões e diferenciações entre um pensamento rigoroso e um pensamento livre, tendo como finalidade a elaboração de uma compreensão construtiva dos objetos da matemática.

Referências bibliográficas

- Bateson, G. (1972). *Steps to an ecology of mind*. New York: Ballantine Books.
- Borges, J. L. (2008). *O aleph*. Editora Companhia das Letras. São Paulo. Brasil.
- Borges, J. L. (2009). *O livro de areia*. Editora Companhia das Letras. São Paulo. Brasil.
- Carroll, L. (1895). *Carroll's paradox*. Recuperado em 05 de setembro de 2007 de <http://www.mathacademy.com/pr/prime/articles/carroll/index.asp>
- Otte, M. (1990). *Arithmetic and geometry: Some Remarks on the concept of complementary*. In *Studies in Philosophy and Education*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. n° 10. pp 37-62.
- Otte, M. (1993). *O Formal, o social e o subjetivo*. São Paulo - Brasil: Unesp.

- Otte, M. Russell B. (2001). *Introduction to mathematical philosophy*. In: Educação Matemática Pesquisa. São Paulo: EDUC, v.3, PP. 11-55.
- Otte, M. (2003). *Complementarity, sets and numbers*. Educational studies in mathematics. Alemanha: Kluwer Academic Publishers. v.53, p. 203-228.
- Otte, M. (2012). *A Realidade das Idéias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá, Brasil: Editora EdUFMT.
- Ryle, G. (1993). *Dilemas*. Cap. III. Aquiles e a tartaruga. Trad. Álvaro Cabral. São Paulo, Brasil: Martins fontes.
- Russell, B. (1966). *Nosso conhecimento do mundo exterior: estabelecimento de um campo para estudos sobre o método científico em filosofia*. trad. De R. Haddock Lobo. São Paulo, Brasil: Editora Nacional.
- Russell, B. (1974). *Introdução à filosofia da matemática*. Tradução Giasone Rebuá. Rio de Janeiro: Zahar Editora.pp. 9-66.
- Vygostky, L.S. et al (1988). *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo. Brasil: Editora ícone.
- Vygotsky, L. S. (2000). *A formação social da mente*. São Paulo, Brasil: Editora Martins Fontes.
- Wertheimer, M. (1945). *Productive thinking*. New York: Harper.