LAS SERIES NUMÉRICAS INFINITAS EN LA INDIA EN LOS SIGLOS VI AL XVI

Alejandro Miguel Rosas Mendoza
CICATA-IPN. (México)
alerosas@ipn.mx

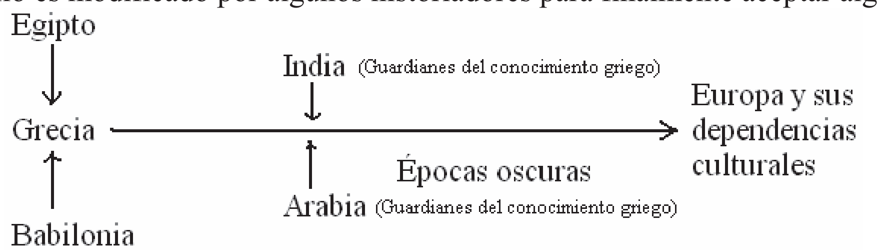
Campo de investigación: epistemología. Nivel: superior
Palabras clave: serie numérica infinita, expansión, aproximación

Resumen.
En la historia de las matemáticas se hace un gran énfasis en el desarrollo logrado por los matemáticos europeos, desde los griegos hasta el presente. A manera de anécdota se describen los avances de algunos pueblos no europeos como los egipcios, chinos, hindúes, mayas, etc., pero siempre indicando el avance inferior logrado en sus matemáticas en comparación con los pueblos europeos. En este trabajo se muestran algunos de los avances de los matemáticos de la antigua India, y en particular los avances alcanzados en la expansión de funciones en series de funciones así como sus aplicaciones para el cálculo de tablas de funciones trigonométricas y las aproximaciones del valor de π con hasta 12 decimales exactos.

La historia matemática vista por los europeos

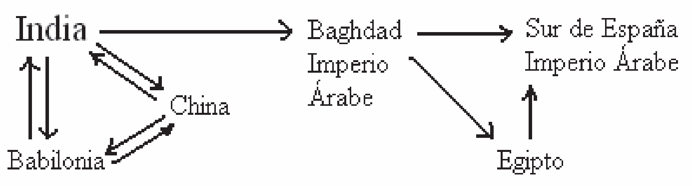
En todos los campos de la matemática podemos observar un marcado eurocentrismo, es decir, el enfoque de los historiadores que asignan los avances en matemáticas casi exclusivamente a los matemáticos europeos. En la mayoría de las obras de historia de las matemáticas pueden verse pequeños resúmenes de las contribuciones matemáticas hechas por los pueblos no europeos. En general sólo se hace un recuento de la geometría y la aritmética que fueron desarrolladas por egipcios, babilonios, árabes e hindúes. Fuera de estas ramas de la matemática sólo se mencionan pequeñas contribuciones que son vistas como poco importantes.

En Pearce (2006) puede verse una discusión acerca de cómo el eurocentrismo ha dominado la historia de las matemáticas indicando que la matemática tiene un desarrollo como: Grecia (origen) $\rightarrow$ Edad Media $\rightarrow$ Renacimiento $\rightarrow$ Europa actual posteriormente comenta que este desarrollo es modificado por algunos historiadores para finalmente aceptar algo como



Este esquema establece la visión de que los pueblos no europeos sólo reprodujeron o reconstruyeron los conocimientos que previamente habían realizado los griegos (europeos), Pearce (2006) dice que varios historiadores hablan de este modo y cita como ejemplo a Duhem "*...Arabic Science only reproduced the teachings received from Greek science*", a Sarton "*...One could almost omit Hindu and Chinese developments in mathematics*" y a Tannery "*...The more one examines the Hindu scholars the more they appear dependent upon the Greeks…(and)…quite inferior to their predecessors on all aspects*"

Pearce propone una modificación en el esquema histórico para un enfoque no eurocentrista durante lo que él llama épocas obscuras



Si nos restringimos a un área en particular como las series infinitas las contribuciones casi desaparecen por completo. Por ejemplo, para Reiff (1992) las series infinitas aparecieron con Arquímedes, por casi dos mil años las series infinitas desaparecieron de las matemáticas para reaparecer con Mercator y ser finalmente desarrolladas por Newton y todos sus sucesores. Smith (2005) nombra a Reiff como referencia pero sólo considera a las series infinitas como resultado de Newton y Leibniz para sólo enfocarse a los resultados que siguieron a Gauss.

En la página 44 de Mankiewickz (2000) podemos ver una breve referencia a los adelantos en series infinitas por parte de los hindúes, pero sólo es un comentario de apenas madia página. Además dentro de este comentario se menciona al trabajo de Newton a modo de darnos una idea de que el trabajo realizado por los hindúes es semejante al que hicieron los matemáticos europeos.

Las series infinitas en la India

El desarrollo de las matemáticas en la India es muy antiguo como puede verse en De Mora y Ludwika (2003) donde se cita el pasaje

> *Indra, ven hacia aquí con dos corceles castaños,*
> *Ven con cuatro, con seis cuando se te invoca.*
> *Ven tú con ocho, con diez, para beber el Soma.*
> *He aquí el jugo, valiente guerrero, no lo desdeñes*
> *¡Oh Indra!, ven tú aquí habiendo enganchado a tu carro*
> *veinte, treinta, cuarenta caballos.*
> *Ven tú con cincuenta corceles bien adiestrados, Indra,*
> *sesenta o setenta, para beber el Soma.* (De Mora y Ludwika, 2003, p. 28)

Versos en los que se tiene la representación de dos progresiones aritméticas, la primera de diferencia 2 y la segunda de diferencia 10. Estos versos aparecen en el *Mandala II* del *Ṛg Veda* en el himno 18 y cuyo origen está calculado entre los años 2000 a. C. al 1750 a. C. Pero no se mencionan evidencias de que se haya realizado la suma de las progresiones como para sugerir un uso inicial de series infinitas; aunque, sí existe el concepto de infinito como se lee en De Mora y Ludwika (2003) cuando se cita el pasaje del *Dhavalā*:

> ***Ananta*** *es aquello que mediante la sustracción de números* $sa\underset{\bullet}{m}khy\bar{a}ta$ *(numerables) y* $asa\underset{\bullet}{m}khy\bar{a}ta$ *(innumerables) por siempre, por un tiempo sin fin, no se agota.* (De Mora y Ludwika, 2003, p. 51)

Las series numéricas aparecen, después de *Arquímedes* y sin evidencia de la influencia griega, en los trabajos de *Aryabhata* un matemático hindú cuya obra *Aryabhatiya* fechada aproximadamente en el año 499 d. C. cubre temas como

- Fórmulas para encontrar la suma de diferentes tipos de series
- Reglas para encontrar el número de términos de una progresión aritmética
- Tablas de valores del seno.

En Hayashi (1997) puede verse una discusión completa de la forma en que *Aryabhata* realiza sus cálculos y presenta la traducción del sánscrito al inglés de algunos pasajes de *Aryabhatiya.* Hayashi reproduce grabados y los métodos seguidos por *Aryabhata* al utilizar dos diferentes aproximaciones al seno mediante diferencias de segundo orden las cuales aparecen en el primer capítulo ($da\check{s}ag\bar{i}tik\bar{a}-p\bar{a}da$) y en el segundo capítulo ($ganita-p\bar{a}da$) respectivamente de *Aryabhatiya*. Este trabajo de Hayashi (1997) nos permite ver que para el siglo IV la matemática hindú ya utilizaba series finitas para realizar cálculos y aproximaciones de valores de la función seno que les permitía elaborar tablas de gran exactitud.

El trabajo de *Aryabhata* fue continuado por *Brahmagupta* (598 d. C. – 670 d. C.) quien escribió la obra *Brahmasphutasiddhanta* (La comprensión del Universo) en la cual, de acuerdo a The MacTutor History of Mathematics Archive, aparecen reglas para sumar series (aunque no indica si estas series son finitas o infinitas), también aparecen reglas para sumar los cuadrados de los n primeros enteros y la suma de los cubos de los primeros n enteros. De acuerdo a The MacTutor History of Mathematics Archive, Pearce (2002) y Mankiewickz (2000), en *Brahmasphutasiddhanta* se utilizaron fórmulas tan avanzadas como las que casi 1000 años después descubrirían los matemáticos europeos y serían nombradas fórmulas de interpolación de Newton-Stirling y fórmulas iterativas de Newton-Raphson. Además *Brahmagupta* fue el primero en intentar asignar valores a fracciones como $\frac{n}{0}$ y en particular a la expresión $\frac{0}{0}$.

Alrededor del año 850, *Mahavira* (o *Mahaviracharya ~Mahavira el maestro*) escribió la obra *Ganitasar Sangraha* considerada como brillante. *Mahavira* proporcionó muchas fórmulas para trabajar con progresiones geométricas (Pearce, 2002).

Sridhara fue otro matemático cuyos trabajos se consideran realizados alrededor del año 900 (Pearce, 2002), en particular en su obra *Patiganita* aparecen secciones del libro dedicadas al cálculo de progresiones aritméticas y progresiones geométricas, además de fórmulas para calcular la suma de algunas series finitas que se vuelven una referencia estándar para obras posteriores.

Hacia el año 1100 d. C. el desarrollo de la matemática hindú recae en *Bhaskaracharya* o *Bhaskara II*, considerado el más grande matemático hindú de la antigüedad (Pearce, 2002,

cap. 8-IV; Mankiewickz, 2000). En su obra *Lilavati* (La hermosa) que versa sobre matemáticas se encuentra en el capítulo 5 la resolución de problemas sobre progresiones aritméticas y progresiones geométricas.
En el año 1350 d.C. el matemático *Narayana Pandit*, escribió la obra *Ganita Kaumudi* de 14 capítulos (Pearce, 2002). El capítulo 13 de esta obra (llamado *Red de números*) está dedicado a las sucesiones de números y algunos problemas relacionados con las progresiones aritméticas. En el capítulo 14, discute cuadrados mágicos, y utiliza fórmulas y reglas para trabajar las relaciones entre los cuadrados mágicos y las series aritméticas.

Hacia el año 1350 d.C. nace el matemático *Madhava* de Sangamagramma, (2002). En los trabajos de *Madhava* aparecen expresiones que siglos después serán redescubiertas por los matemáticos europeos. *Madhava* calcula la expansión en serie infinita de la función arctang. Lo que los matemáticos hindúes escribían **seno de q** en notación actual lo escribiríamos como **r senq** donde r es el radio, de la misma forma el **coseno de q** se escribiría **r cosq**, con lo que *Madhava* obtuvo el equivalente a la expresión

$$rq = \frac{r \cdot r\sin q}{1 \cdot r\cos q} - \frac{r \cdot (r\sin q)^3}{3 \cdot (r\cos q)^3} + \frac{r \cdot (r\sin q)^5}{5 \cdot (r\cos q)^5} - \frac{r \cdot (r\sin q)^7}{7 \cdot (r\cos q)^7} + \cdots$$

y haciendo $\tan q = \dfrac{\sin q}{\cos q}$ y cancelando el radio **r** tenemos $q = \dfrac{\tan q}{1} - \dfrac{\tan^3 q}{3} + \dfrac{\tan^5 q}{5} - \dfrac{\tan^7 q}{7} + \cdots$ que se considera equivalente a la serie $\arctan q = q - \dfrac{q^3}{3} + \dfrac{q^5}{5} - \dfrac{q^7}{7} + \cdots$ redescubierta por *Gregory* alrededor del año 1668, casi 300 años después de *Madhava*.

Madhava también conoció la expresión $\sin\theta = \theta - \dfrac{\theta^3}{3!} + \dfrac{\theta^5}{5!} - \cdots$ que redescubrió *Newton* y por lo cual Pearce (2002) la llama *Serie de potencias de Madhava-Newton*.

De la misma manera conoció $\cos\theta = 1 - \dfrac{\theta^2}{2!} + \dfrac{\theta^4}{4!} - \cdots$ nuevamente una *Serie de potencias de Madhava-Newton*. Esta serie también se conoce como *Serie de Maclaurin*.

Madhava también sustituyó el valor $q = \dfrac{\pi}{4}$ en $q = \dfrac{\tan q}{1} - \dfrac{\tan^3 q}{3} + \dfrac{\tan^5 q}{5} - \dfrac{\tan^7 q}{7} + \cdots$

y obtuvo la serie $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ la cual es redescubierta por *Leibniz* (casi 300 años después). Sorprendentemente *Madhava* también proporcionó un término de corrección para esta serie que queda expresada como $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{n} \pm R_n$

donde R_n tiene alguna de las tres formas siguientes $R_n = \frac{1}{4n}$, $R_n = \frac{n}{4n^2+1}$ o $R_n = \frac{n^2+1}{4n^3+5n}$. Además al sustituir $q = \frac{\pi}{6}$ obtuvo la serie $\pi = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{5\times 3^2} - \frac{1}{7\times 3^3} + \cdots\right)$ y utilizó esta expresión para proporcionar el valor $\pi = 3.14159265359$ que consta de 11 lugares decimales correctos. Esta expresión precede a los trabajos de *Wallis* (~1645) sobre productos continuos. Otra expresión atribuida a *Madhava* es $\pi d \approx 2d + \frac{4d}{2^2-1} - \frac{4d}{4^2-1} + \cdots \pm \frac{4d}{n^2-1}$ la cual le permitió calcular 13 lugares decimales exactos de π.

También le son atribuidas a *Madhava* las siguientes expresiones que se consideran casos especiales de la Serie de Taylor $\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x$ y $\cos(x+h) \cong \cos x - \frac{h}{r}\sin x + \frac{h^2}{2r^2}\cos x$ donde **h** y **r** son cantidades pequeñas. Además se tiene la expresión $\sin(x+h) \cong \sin x + \frac{h}{r}\cos x - \frac{h^2}{2r^2}\sin x + \frac{h^3}{6r^3}\cos x$ considerada como una aproximación de tercer orden de la serie de Taylor para la función seno, atribuida a *Gregory* (O'Connor y Robertson, 2000).

Parameśvara nació en 1360 y fue alumno de *Madhava* y escribió varias obras en las que realiza comentarios sobre los trabajos de sus predecesores. En Gupta (1974) y en Plofker (2001) se trata a profundidad la aproximación de tercer orden a la función seno que aparece en la obra *Siddhāntadīpikā*. En Gupta (1974) se ven las citas de las estrofas en sánscrito de la forma de encontrar estas aproximaciones y que equivalen a $R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \cfrac{R\cos\alpha - \cfrac{R\sin\alpha + \cfrac{R\cos\alpha}{2D}}{2d}}{D}$ en donde si escribimos $D = \frac{R}{\theta}$ de acuerdo a nuestra notación actual se obtiene

$$R\sin(\alpha+\theta) = R\sin\alpha + \frac{\theta}{R}R\cos\alpha - \left(\frac{\theta}{R}\right)^2\frac{R\sin\alpha}{2} - \left(\frac{\theta}{R}\right)^3\frac{R\cos\alpha}{4}$$

Nilakantha Somayaji nació en 1444 d.C. y escribió varias obras, entre ellas *Tantrasamgraha* que se considera una fuente importante de las matemáticas que utilizó. Aparentemente *Nilakantha* no sólo utilizó los descubrimientos de *Madhava* sino que además hizo extensiones y mejoras de los resultados de *Madhava*. Se dice que obtuvo la serie $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ al obtener una expresión aproximada para un arco de circunferencia de un círculo y entonces tomó el límite. Además proporcionó diversas series para $\frac{\pi}{4}$ que convergen más rápidamente que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$

Jyesthadeva nació en 1500 d.C. en *Kerala*. Escribió la obra *Yuktibhasa* que es un compendio de las matemáticas de Kerala y es un texto especial porque presenta teoremas con sus demostraciones y contiene también la deducción de las reglas tratadas en la obra. *Yuktibhasa* está basada en *Tantrasamgraha* (de *Nilakantha*) y además contiene la prueba de muchos de los resultados de *Madhava* y *Nilakantha*. Entre esas pruebas se encuentra la explicación de cómo *Madhava* pudo obtener sus expansiones en series.

Conclusiones

En esta breve recopilación de los avances matemáticos hindúes queda claro que la historia de tipo eurocentrista, hasta ahora aceptada, ha omitido grandes avances logrados por civilizaciones no europeas. En particular la matemática hindú lentamente se ha revelado como una de las más avanzadas. En estas regiones han existido diversas civilizaciones y existen indicios de desarrollos matemáticos desde el año 3000 a.C. lo que nos da una historia matemática de casi cinco mil años y de la cual poco se sabe. Es de desearse que al pasa del tiempo nuevas investigaciones históricas nos permitan conocer otros avances que por el momento son conocidos sólo por referencias aisladas.

Finalmente, es necesario establecer un nuevo enfoque histórico que permita observar a las culturas no europeas como contribuyentes importantes a la matemática mundial.

Referencias bibliográficas

Gupta, R. C. (1974). An Indian Approximation of Third Order Taylor Series Approximation of the Sine. *Historia Mathematica* **1**, 287-289.

De Mora, J. y Ludwika, M. (2003). *Apuntes para una historia de las matemáticas y astronomía en la india antigua*. Departamento de Investigaciones Filológicas. UNAM, México.

Pearce, I. (2006). *Indian Mathematics: Redressing the balance*. Tomado de la página WEB http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Projects/Pearce/index.html el 13 de febrero de 2006.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas, del cálculo al caos*. Barcelona, España. Ediciones Paidós Ibérica

Reiff, R. (1992). *Geschichte der unendlichen Reihen* [Historia de las Series Infinitas]. Verlag. Liechtenstein. (Obra original de 1889).

Smith, D. (2005). *History of Modern Mathematics* [Historia de las Matemáticas Modernas]. Mathematical Monographs No.1. 4ta edición. (Versión original de 1906) Obtenido de la página del Proyecto Gutemberg el 17 de marzo de 2006

URL: http://www.gutenberg.org/catalog/

Hayashi, T. (1997). Āryabhata's Rule and Table for Sine-Differences. *Historia Mathematica* 24, 397-406

O'Connor, J. y Robertson, E. (2000). Madhava of Sangamagramma. Obtenido de la página de la School of Mathematics and Statistics University of St. Andrews, Scotland

http:///www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Madhava.html

el 7 de marzo de 2006.

Plofker, K. (2001). The "error" in the Indian "Taylor series approximation" to the sine. *Historia Mathematica* 28, 283-295.