LOS PROCESOS DE CONVENCIÓN MATEMÁTICA Y LA INCLUSIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS EN EL MARCO DEL ANÁLISIS EULERIANO[•]

Gustavo Martínez Sierra
Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
gmartinez@cimateuagro.org , gamartinezsierra@gmail.com
Campo de investigación: socioepistemología. Nivel educativo: superior
Palabras clave: socioepistemología, construcción de conocimiento, convención matemática, función, funciones trigonométricas

Resumen
Lo aquí presentado es parte de los resultados de una línea de investigación que busca elaborar explicaciones de los procesos sociales de generación de conocimiento matemático. En particular estamos interesados en el estudio de los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de convención matemática* (Farfán & Martínez, 2001, 2002; Martínez-Sierra, 2002; Martínez-Sierra, 2003, 2005, 2006). De manera más específica lo aquí presentado tiene por objetivo presentar los avances en la búsqueda por identificar los procesos de convención matemática presentes en la inclusión de las funciones trigonométricas en el contexto del análisis euleriano.

Introducción

De manera general, la presente investigación encuentra su marco de referencia en dos líneas de investigación: Aquella denominada desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional (Cantoral y Farfán, 1998) y aquella que estudia los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento (Martínez-Sierra, 2005). La primera línea busca determinar los procesos de construcción social del conocimiento relacionado con la matemática de la variación y el cambio y ha prestado parte de su atención al estudio de la construcción de la noción de función (Farfán, 1997; Farfán et al., 2000). Dentro de la primera línea es de señalar que algunas de estas investigaciones elaboran explicaciones que dotan de particularidades a las funciones trascendentes, como lo son las funciones logarítmicas (Ferrari, 2001), exponenciales (Lezama, 2003; Martínez-Sierra, 2003) y trigonométricas (Buendía y Cordero, 2005; Montiel, 2005). Como es de notarse en las investigaciones anteriores se han analizado específicamente los diferentes tipos de funciones trascendentes; como la exponencial, logaritmo y las funciones trigonométricas. Tales investigaciones han dado muestra que cada tipo de función naturaleza y significados específicos y por ende producen fenómenos didácticos también específicos. La segunda línea de investigación tiene por objetivo estudiar los procesos presentes en la articulación de los sistemas conceptuales matemáticos a los que hemos llamado *procesos de convención matemática*. En términos generales la línea de investigación descansa en dos hipótesis:

- **H1**: La naturaleza y significados de algunos contenidos matemáticos, presentes en diversos corpus de conocimiento pueden ser explicados a través del proceso de convención matemática.
- **H2**: El manejo escolar de tales contenidos provoca la existencia de fenómenos didácticos explicables, precisamente, en términos del proceso de convención matemática.

[•] Este trabajo es financiado por el Fondo Sectorial de Investigación para la educación SEP-CONACYT, Clave: SEP-2004-C01-46917 y por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero, Clave: GUE-2002-C0-7626.

En particular en este trabajo tiene por objetivo presentar los avances en la búsqueda por identificar los procesos de articulación y convención matemática presentes en la construcción de las funciones trigonométricas en el contexto de la obra de Euler.

Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias. La consideración anterior plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza.

La noción de convención matemática

Un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción de consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la *práctica de integración sistémica de los conocimientos*; es decir existe una *normativa de la actividad para relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado*. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes (Martínez-Sierra, 2003).

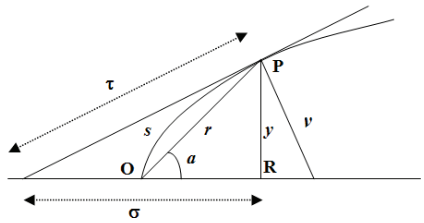
Esencialmente, la búsqueda de integración puede resolverse optando por alguna de las siguientes vertientes: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Así vista <u>la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.</u>

Veamos el siguiente ejemplo ilustrativo. Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $2^{1/2}$. La multiplicación reiterada no puede ser utilizada para ello, por lo que buscamos otro camino. ¿Qué significado tomar? Si retomamos la operatividad de las potencias de la misma base podemos postular que sería conveniente que $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ por lo que tenemos que “convenir” que $2^{1/2}=\sqrt{2}$. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^{1/2}=\sqrt{2}$ *no se puede demostrar sino se debe convenir.*

La inclusión de las cantidades trigonométricas al análisis euleriano

De acuerdo con Bos (1975) dentro de la matemática de fines del siglo XVII el principal objeto de estudio era la curva. Una curva en un sistema de referencia (independientemente de las concepciones de ésta: como dibujo de una regla de construcción, como punto en movimiento, o como poligonal de lados infinitamente pequeños, etc.) involucra las relaciones entre distintas cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva. Tales cantidades geométricas variables son, por ejemplo, (ver figura 1): ordenada, abscisa, longitud de arco, radio, arco polar, subtangente, normal, tangente, área entre curva y eje, rectángulo circunscrito, sólido de revolución, etc.

> "La relación entre variables [ordenada, abscisa, radio, subtangente, entre otras] eran expresadas, cuando era posible por medio de ecuaciones. Esto no era siempre posible, ya que justo antes del final del siglo XVII no existían formulas para las relaciones trascendentes y éstas eran expresadas por medio de prosas explicativas que básicamente expresaban el método geométrico para la construcción de la curva" (Bos, 1975).



x: abscisa, y: ordenada, s: longitud de arco, r: radio, a: arco polar, σ: subtangente, τ: tangente, v: normal, OPR: área entre la curva y la abscisa

Figura 1. Cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva

La búsqueda de las relaciones entre cantidades geométricas propició la búsqueda de diversos métodos para lograr tal objetivo. Esto produjo, entre otros aspectos, diferentes series infinitas que establecían las relaciones entre las cantidades. Por ejemplo Gregory, (Malet, 1994-1994) establece, hacia el año 1670, que, en el cicloide MOPA (Figura 2) que es generado por el punto A y llamando DA=r y Dβ=b, la ordenada PQ de cualquier punto sobre el cicloide puede ser expresado en términos de la abscisa a = OQ por

$$\frac{ra}{b}-\frac{r^2a^2}{2b^3}+\frac{r^3a^3}{2b^5}-\frac{ra^3}{6b^3}+\frac{7r^2a^4}{24b^5}-\frac{5r^4a^4}{8b^7}+\frac{7r^5a^5}{8b^9}-\frac{r^3a^5}{2b^7}+\frac{ra^5}{120b^5}.$$

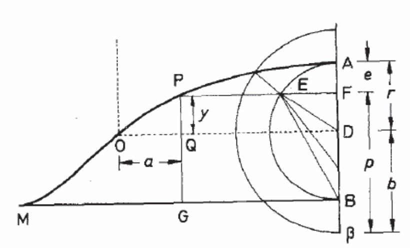
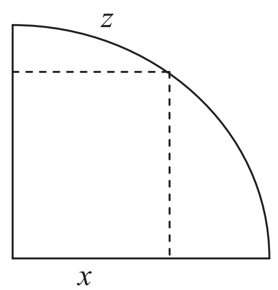


Figura 2. Cantidades geometricas presentes en una Cicloide según Gregory (Malet, 1994-1994)

En el mismo sentido Babini (1978, p. 121), afirma que entre las series remitidas a Collins por Gregory, en correspondencia fechada en el año 1671, figuran las siguientes ecuaciones para encontrar el arco, dada la tangente, y la tangente, dado el arco (en donde r el radio de un círculo, a el arco y t la tangente):

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} - etc.$$
$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{5r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} + etc.$$

Por la misma época Newton (1669), a través de su método de fluxiones, encontró las relaciones entre un arco (z) y su seno correspondiente (x) en un círculo de radio 1 (Figura 3).



$$x = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800} + \ldots$$
$$z = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$$

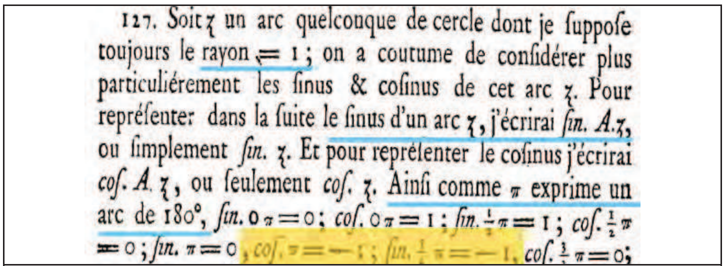
Figura 3. Series que relacionan un arco (z) y su seno correspondiente (z) (Newton, 1669)

Montiel (2005) menciona que quizá fueron los nuevos usos de las cantidades trigonométricas lo que las despojó de su carácter geométrico, descrito con anterioridad, pues pasaron de ser consideradas líneas de círculo a cantidades que describían ciertos fenómenos, particularmente movimientos periódicos. Tan pronto como se acometió el estudio del movimiento y se empezó a disponer de los instrumentos matemáticos adecuados, y en cuanto sus leyes comenzaron a introducirse como fundamento de la física, resultó que, al estudiar la naturaleza, no era posible seguir considerando el número determinado o sus equivalentes geométricos (punto, recta, círculo, etc.) como objeto único de las investigaciones (Loi, 1999; citado en Montiel, 2005). Es decir, el ente matemático dejó de ser el número: la ley de variación, la función, se convirtió en el centro en torno al cual se organizó la ciencia. De acuerdo con Katz (1987):

> *"…ningún libro de texto antes de 1748 trata con el calculo de de tales funciones. Esto es, en ninguno de una docena de libros de texto escrito en Inglaterra o en el continente durante la primera mitad del siglo 18 se encuentra un tratamiento de la derivada y la integral del seno el coseno o alguna discusión de la periodicidad o de las propiedades de adición de tales funciones. Esto contrasta ampliamente con el caso de las funciones exponencial y logaritmo. Aquí intentaremos explicar porque las FT no entraron al análisis hasta 1739. En ese año Euler invento este cálculo. El tuvo conducido para esta invención*

> *porque necesitaba las FT como soluciones de ecuaciones diferenciales lineales. En adición, su descubrimiento de un método par resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes fue influenciado por su conocimiento que de esas funciones debe proveer parte de esta solución"* (Katz, 1987, p. 311)

De esta manera Euler proporciona en su libro de *Introductio in analysin infinitorum* (Euler, 1738/1845) un tratamiento de lo que podemos llamar el precálculo de las funciones trigonométricas. Las define numéricamente, discute varias de sus propiedades incluyendo fórmulas de adición y el desarrollo de sus series de potencias, con lo que les dio el status de función[******]. Del primer Tomo, en el Capítulo VIII, *Des Quantités transcendantes qui naissent du cercle* (Figura 4), define las funciones trigonométricas como cantidades trascendentes que nacen del círculo y señala que π es la semicircunferencia de un círculo (de radio 1) y en consecuencia es la longitud del arco de 180° y entonces, establece sen 0π =0, cos 0π = 1, sen 2π =0 y cos 2π = 1.



127. Soit z un arc quelconque de cercle dont je ſuppoſe toujours le rayon = 1 ; on a coutume de conſidérer plus particuliérement les ſinus & coſinus de cet arc z. Pour repréſenter dans la ſuite le ſinus d'un arc z, j'écrirai *ſin. A.z*, ou ſimplement *ſin. z*. Et pour repréſenter le coſinus j'écrirai *coſ. A. z*, ou ſeulement *coſ. z*. Ainſi comme π exprime un arc de 180°, *ſin.* 0 π = 0 ; *coſ.* 0 π = 1 ; *ſin.* $\frac{1}{2}$ π = 1 ; *coſ.* $\frac{1}{2}$ π = 0 ; *ſin.* π = 0 , *coſ.* π = − 1 ; *ſin.* $\frac{3}{2}$ π = − 1, *coſ.* $\frac{3}{2}$ π = 0;

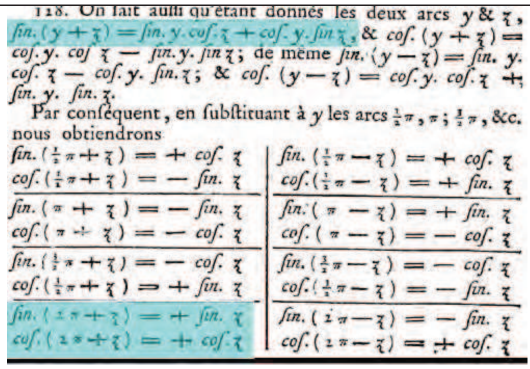
Figura 4. Cantidades trascendentes que nacen del círculo (Euler, 1738/1845)

Lo que llama fuertemente nuestra atención es notar que Euler no menciona por que, por ejemplo, $\cos\pi = -1$. La información que tenemos hasta ahora sólo nos permite conjeturar que quizá Euler utilizó la fórmula del seno de la suma dos arcos: $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ & $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ para construir la convención $\cos\pi = -1$. Un posible razonamiento es el siguiente:

> Partamos del supuesto que queremos asignarle un significado al símbolo $\cos\pi$.¿Qué significado tomará? Si tomamos a la fórmula
>
> $$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
>
> como conocimiento base, que deseamos preservar, debería cumplirse que
>
> $$\cos\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2}\times\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$
>
> por lo que debemos convenir que $\cos\pi = -1$.

[******] Recordemos que para Euler "Una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada arbitrariamente con esta variable y con números o cantidades constantes" Euler (1738/1845, p. 3) y que cuando establece: "...expresión analítica formada arbitrariamente..." está aceptando el uso de las operaciones usuales del álgebra como sumas, productos, diferencias, cocientes y operaciones trascendentes como exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Admite también la extensión de éstas al infinito y la solución de ecuaciones algebraicas -incluso de grado infinito- en donde las constantes pueden incluso ser números complejos.

La conjetura anterior encuentra apoyo al notar que en artículo siguiente Euler hace una serie de cálculos basados en las fórmulas del seno y coseno de la suma dos arcos (Figura 5) o en la manera en que en su *Institutiones Calculi Differentialis* (Euler, 1755) calcula la diferencial del seno (Figura 6).

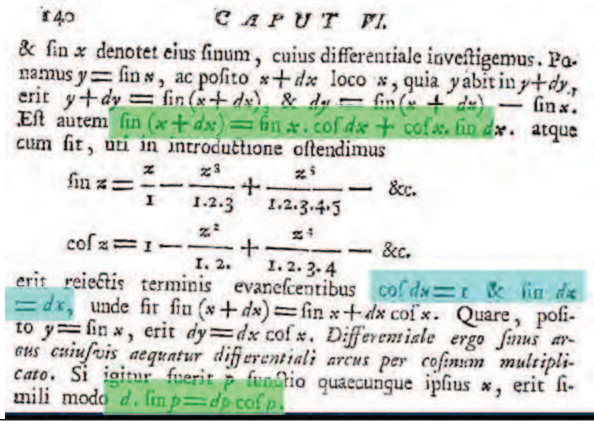


118. On fait aussi qu'étant donnés les deux arcs y & z, $\sin.(y+z) = \sin.y.\cos.z + \cos.y.\sin z$, & $\cos.(y+z) = \cos.y.\cos z - \sin.y.\sin z$; de même $\sin.(y-z) = \sin.y.\cos.z - \cos.y.\sin.z$; & $\cos.(y-z) = \cos.y.\cos.z + \sin.y.\sin.z$.

Par conséquent, en substituant à y les arcs $\frac{1}{2}\pi$, π; $\frac{3}{2}\pi$, &c. nous obtiendrons

$\sin.(\frac{1}{2}\pi+z) = +\cos.z$	$\sin.(\frac{1}{2}\pi-z) = +\cos.z$
$\cos.(\frac{1}{2}\pi+z) = -\sin.z$	$\cos.(\frac{1}{2}\pi-z) = +\sin.z$
$\sin.(\pi+z) = -\sin.z$	$\sin.(\pi-z) = +\sin.z$
$\cos.(\pi+z) = -\cos.z$	$\cos.(\pi-z) = -\cos.z$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi+z) = -\cos.z$	$\sin.(\frac{3}{2}\pi-z) = -\cos.z$
$\cos.(\frac{3}{2}\pi+z) = +\sin.z$	$\cos.(\frac{3}{2}\pi-z) = -\sin.z$
$\sin.(2\pi+z) = +\sin.z$	$\sin.(2\pi-z) = -\sin.z$
$\cos.(2\pi+z) = +\cos.z$	$\cos.(2\pi-z) = +\cos.z$

Figura 5. Uso de fórmulas del seno y coseno de la suma dos arcos (Euler, 1738/1845)



140 CAPUT VI.

& $\sin x$ denotet eius sinum, cuius differentiale investigemus. Ponamus $y = \sin x$, ac posito $x+dx$ loco x, quia y abit in $y+dy$, erit $y+dy = \sin(x+dx)$, & $dy = \sin(x+dx) - \sin x$. Est autem $\sin(x+dx) = \sin x.\cos dx + \cos x.\sin dx$. atque cum sit, uti in introductione ostendimus

$$\sin z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \text{\&c.}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1.2.} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{\&c.}$$

erit reiectis terminis evanescentibus $\cos dx = 1$ & $\sin dx = dx$, unde fit $\sin(x+dx) = \sin x + dx \cos x$. Quare, posito $y = \sin x$, erit $dy = dx \cos x$. *Differentiale ergo sinus arcus cuiusvis aequatur differentiali arcus per cosinum multiplicato.* Si igitur fuerit p functio quaecunque ipsius x, erit simili modo $d.\sin p = dp \cos p$.

Figura 6. Uso de la fórmulas del seno de la suma dos arcos para el calculo de la diferencial se seno (Euler, 1755. p. 140)

Referencias bibliográficas

Babini, J. (1978). *El cálculo diferencial. Origen y polémica*. México: Balsal Editores S.A.

Bos, H. J. M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics,* 59(2).

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (1998) Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon, Revista de la S.A.E.M. "Thales"*. 42, 353-369.

Euler, L. (1738/1845). *Introduction a l'analyse infinitésimale.* París, Francia: L'Ecole Polytechnique (Trabajo original publicado en 1738).

Euler, L. (1755/1787). Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum (Vol. 1). TICINI. Tiphographeo Petri Galeati.

Farfán, R. (1997) *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M.; Martínez, G. & Ferrari, M. (2000). Lenguaje Algebraico y pensamiento funcional. Un estudio de las funciones pretextando la resolución de desigualdades (Cap. 7, pp. 89-145). En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán, et al. (2000) *Desarrollo de Pensamiento Matemático*. ITESM-Universidad Virtual. México: Editorial Trillas.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2001). Sobre la naturaleza de las convenciones matemáticas: el caso del exponente cero. En G. L. Beitía (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 14*. (pp. 524-531). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R.M. y Martínez, G. (2002). Explicación de algunos fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. En C. R. Crespo (Ed.) *Acta Latinoamericana de matemática Educativa. Vol. 15 Tomo I*. (pp. 225-231). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Katz, V. (1987). The Calculus of the Trigonometric Functions. *Historia Mathematica* 14, 311-324

Lezama, J. (2003). *Estudio de la reproducibilidad*. Tesis de doctorado. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Loi, M. (1999) Prologo en Guenard y Lelièvre (Eds.). *Pensar la Matemática*. España: Tusquets Editores.

Newton, I. (1669). De Analysi per equationes infinitas (june 1669). En D.T. Whiteside (1967) (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton. Vol. II (1667-1700)* (pp. 206-247). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Malet, A. (1993-94). James Gregorie on Tangents and the 'Taylor' Rule for Series Expansions. *Archive for History of Exact Science* 46, 97-137.

Martínez-Sierra, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1) 45-78.

Martínez-Sierra, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada de IPN. CICATA-IPN. México.

Martínez-Sierra, G. (2005). Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 8(2).

Martínez-Sierra, G. (2006). Los procesos de convención matemática como constituyentes en la construcción social de la matemática de la variación y el cambio: el caso de las funciones elementales. En G. Martínez (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 19* (pp. 745-751). México: CLAME. ISBN: 970-9971-08-5.

Montiel, G. (2005). *Estudio socioepistemológico de la Función Trigonométrica*. Tesis de Doctorado no publicada. CICATA del IPN, México.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.