

TRANSFERENCIA EN RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS: INFLUENCIA DEL CONTEXTO, LA ESTRUCTURA Y LA FAMILIARIDAD EN LA CONSTRUCCIÓN DE ANALOGÍAS

Carlos B. Gómez, Joan Josep Solaz-Portolés y Vicente Sanjosé

Universitat de València.

Resumen

En este trabajo se analiza el papel de la familiaridad, el contexto y la estructura de los problemas en la habilidad para aplicar lo aprendido en una situación a otras situaciones (resolución de problemas por transferencia). Se estudia la transferencia en estudiantes que, a partir de un ejemplo (problema fuente), intentan resolver otros cuatro problemas (problemas diana). Los resultados muestran que cuando los contextos de los problemas son familiares para los estudiantes, las analogías superficiales pueden ocultar las diferencias estructurales. Sin embargo, cuando los contextos de los problemas son no-familiares para los estudiantes, el único efecto significativo procede de la igualdad/diferencia estructural. El efecto global de la familiaridad de los problemas es una reducción sistemática del éxito en la transferencia en problemas no familiares, sea cual sea la relación entre problema 'ejemplo' y problema 'propuesto'. La detección de similitudes/ diferencias estructurales es un buen predictor del éxito con las ecuaciones

Palabras clave: Resolución de problemas algebraicos con enunciado; transferencia; similitud superficial; similitud estructural; familiaridad con el contexto.

Abstract

In this paper we analyze the role of the problems familiarity, surface, and structure on the ability to apply what is learned in one situation to a different one (problem solving by transfer). We study transfer in solving tasks when comparing one example or "source problem" with four "target problems". Results show that when the problem context is familiar to students then Surface similarities can hide Structural differences. However, when the context of the problems is not familiar for students, the only significant effect comes from the equal/different Structures. 'Familiarity' with the context of the problems causes a global and systematic effect: non-familiar problems achieve lower success than familiar problems, no matter the relationship between source and target problems. The detection of structural similarities / differences seems to be a good predictor of algebraic success.

Keywords: Algebraic word problem-solving; transfer; surface similarity; structural similarity; context familiarity

Introducción y Marco Teórico

La resolución de problemas es una de las tareas más creativas, exigentes e interesantes para la mente humana y es un área que ha atraído el interés de los científicos cognitivos

Gómez, C. B., Solaz-Portolés, J. J., y Sanjosé, V. (2012). Transferencia en resolución de problemas algebraicos: influencia del contexto, la estructura y la familiaridad en la construcción de analogías. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 31-39). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

desde siempre, en especial en ciencias y matemáticas (Polya, 1957; Newel y Simon, 1972, Larkin y Reif, 1979). Por ser uno de los objetivos de la educación y una de las pruebas características del aprendizaje de alto nivel, la didáctica de las ciencias y la didáctica de las matemáticas también han centrado su interés en ello (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2006; Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007). Un problema típico en ciencias posee un enunciado escrito en lenguaje natural en el que ciertas entidades del mundo se encuentran en una situación que las relaciona según alguna regla, principio o ley subyacente. Existen aspectos, atributos o características de esa situación que son conocidos y una demanda concreta sobre otro aspecto no conocido. Para atender a esta demanda hay que reconocer y usar esas reglas, principios y leyes pertinentes, pero también, típicamente, hay que saber utilizar algunas habilidades heurísticas y lógico-matemáticas. La comprensión de un problema parte de la comprensión de su enunciado, que no es sino un texto habitualmente corto, con unas pocas frases. Este texto corto demanda una gran cantidad de inferencias y la activación de conocimiento previo específico conceptual, situacional, procedimental, estratégico y esquemático (Solaz-Portolés y Sanjosé, 2007) para atender la demanda del problema.

Un importante objetivo de la educación es incrementar la capacidad de los estudiantes para resolver problemas de diferentes características y disciplinas. Para alcanzar este objetivo el estudiante tiene que, entre otras cosas, aprender a transferir aprendizajes. La transferencia (o *transfer*) es frecuentemente definida como la habilidad para aplicar lo que ha sido aprendido en un determinado contexto a un nuevo contexto (Byrnes, 1996). La transferencia es una estrategia cognitiva muy importante y ha recibido mucha atención en investigación especializada (Hammer et al., 2005; Barnett y Ceci, 2002; Bernardo, 2001; Bassok and Holyoak, 1989; Reed, Dempster and Ettinger, 1985; Gick and Holyoak, 1983 and 1980). En concreto, se ha dedicado una atención especial a los problemas algebraicos con enunciado (Gick y Holyoak, 1980 y 1983; Reed, Dempster y Ettinger, 1985; Bassok y Holyoak, 1989; Reed, 1987).

La analogía entre diferentes problemas se construye identificando los mismos ‘rasgos’ en ellos (Hesse, 1966; Tversky, 1977). Los rasgos identificados en los problemas con enunciado pueden referirse a características perceptibles de los objetos y eventos en el mundo real, o a entidades abstractas como el ‘espacio del problema’ (Newel and Simon, 1972), las ecuaciones, reglas o leyes, etc. El conjunto de rasgos perceptibles en una situación problemática del mundo real, que involucra objetos y hechos en términos concretos (es decir, no abstractos), se denomina ‘Superficie’ (o también ‘Historia’ ó ‘Contexto’) del problema. Los conceptos matemáticos o científicos, las leyes, principios, las relaciones entre cantidades, las ecuaciones, etc., constituyen la ‘Estructura’ del problema (Holyoak y Koh, 1987; Holyoak, 1984). La mayor parte de los problemas académicos de ciencias que se proponen y resuelven en las aulas tienen una Estructura algebraica, determinada por “*el modo en que las cantidades se relacionan unas con otras, más que por las propias cantidades*” (Novick, 1988; pp 511; traducción de los autores). Así pues, en problemas algebraicos las ecuaciones (su forma matemática y su significado) resumen la Estructura del problema.

La analogía entre problemas puede, entonces, construirse en términos de su similitud Superficial y/o Estructural (Holyoak, 1984). Reed (1987) propuso una nomenclatura para las relaciones entre problemas que parece conveniente para nuestros propósitos por su sencillez (Tabla 1):

		Superficie	
		Igual	Diferente
Estructura	Igual	Equivalentes	Isomorfos
	Diferente	Similares	Diferentes

Tabla 1: Relaciones entre problemas en términos de la similitud o diferencia de sus superficies y estructuras

Los profesores de ciencias con frecuencia asumen que las relaciones analógicas entre los problemas resueltos y los problemas propuestos son sencillas de comprender y establecer (Oliva, 2004). Normalmente se atribuye el fracaso en la resolución a dos grandes causas: falta de comprensión del problema o falta de dominio de los procedimientos matemáticos de resolución, pero trabajos como el de Sanjosé, Valenzuela, Fortes y Solaz-Portolés (2007) han verificado con estudiantes de secundaria que las dificultades algebraicas y de cálculo no son el obstáculo principal en la transferencia de aprendizajes.

Estos autores formulan la hipótesis que la causa principal de los impedimentos para realizar la transferencia puede tener su origen en la fase de comprensión, es decir, en la construcción de un adecuado modelo mental del problema: si la situación descrita no plantea dificultades, entonces los obstáculos están en el proceso de “traducción algebraica”, anterior a “la navegación por el espacio algebraico del problema”.

En este trabajo estudiamos con cierto detalle el éxito en resolución de problemas (‘problemas diana’) basado en el establecimiento de analogías con problemas ejemplo (‘problemas fuente’). Para simplificar el diseño, intentamos fijar los modos en que esas analogías pueden establecerse: seleccionamos el problema fuente particular que los estudiantes deben considerar como análogo (al menos, en primera instancia) para resolver el problema diana. Consideraremos las diferentes relaciones que pueden darse entre un problema fuente dado y un problema diana, dadas por la tabla 1. Concentraremos la atención en problemas algebraicos cuya estructura se concreta en un sistema de 2 ecuaciones lineales, habituales en una amplia variedad de temas de Secundaria.

Objetivos

Con este trabajo se pretende investigar:

1. El transfer en la resolución de problemas algebraicos con enunciado, en la construcción de analogías.
2. El papel que juegan la superficie, la estructura de los problemas y la familiaridad con el tema, en la construcción correcta de analogías y el éxito en la resolución.

Hipótesis

En relación con estos objetivos formulamos las siguientes hipótesis:

H1: Influencia de los factores Superficie y Estructura en el transfer. La igualdad o diferencia entre las estructuras y las superficies entre los problemas fuente y diana influye decisivamente sobre las ecuaciones elegidas para resolver el problema diana.

H2: Efectos de la Familiaridad con los contextos del enunciado. Una alta familiaridad de los problemas conduce a mayor éxito en la transferencia que una baja familiaridad.

H3: Análisis de la construcción de analogías estructurales. La relación correcta entre estructuras se relaciona significativamente con una correcta “traducción algebraica”, es decir, con ecuaciones correctas.

Metodología

Sujetos

Los sujetos intervinientes en este experimento pertenecen a 4 centros de la provincia de Valencia, situados en ciudades de más de 10.000 habitantes y en entornos socioculturales medios. Todos ellos se encontraban en el mismo nivel de estudios, 4º ESO, con la opción de Física y Química y pertenecían a 4 grupos naturales en esos centros. Obtuvimos datos completos y fiables de un total de 49 estudiantes. De ellos, 28 participantes se asignaron a la condición “Alta Familiaridad” (el estudio 1). Los 21 restantes participaron en el estudio 2 y se asignaron a la condición de “Baja Familiaridad”. Cada nivel de familiaridad se asignó a dos grupos al azar.

Aunque se trató de una muestra de conveniencia, disponible para el experimento, *a priori* no presenta ningún rasgo distintivo del resto de la población de estudiantes de secundaria del mismo nivel sociocultural.

Diseño y Materiales

Se estudió, mediante una prueba preliminar de conocimientos previos, si los estudiantes reunían o no los conocimientos indispensables para poder comprender los problemas usados en la prueba de transferencia. Esta prueba preliminar consistió en 5 cuestiones cuya respuesta exige plantear una ecuación lineal. Se ofrecían 3 respuestas, una de ellas la correcta. Todos los estudiantes participantes obtuvieron 3 puntos o más en este test.

Para activar los conocimientos previos sobre ecuaciones lineales se preparó un material que recogió los conceptos, procedimientos principales, así como diversos ejemplos resueltos. El tema ya había sido tratado en la asignatura de Matemáticas, de modo que solo se trató de rescatar de la memoria a largo plazo los conocimientos importantes para la prueba de transferencia a realizar después.

Para la prueba de transferencia, se confeccionó un cuadernillo que contenía un problema-ejemplo (problema ‘fuente’) resuelto, y detalladamente explicado; y otros cuatro problemas a resolver (problemas ‘diana’). Los 4 problemas ‘diana’ se relacionaron con el ‘fuente’ de los 4 modos distintos que indica la tabla 1, y serán denominados en lo sucesivo como problema diana equivalente (misma superficie y misma estructura que el fuente), isomorfo (distinta superficie y misma estructura que el fuente), similar (misma superficie y diferente estructura que el fuente) y diferente (distinta superficie y distinta estructura que el fuente). Para diseñar estos 1+4 problemas se utilizó un diseño 2 X 2 (2 superficies diferentes y 2 estructuras diferentes), como muestra la Tabla 2. Como se ha dicho antes, las superficies consideradas fueron, en el estudio 1, ‘llenado/vaciado de piscinas’ y ‘aumento/disminución de ahorros en cuentas corrientes’. En el estudio 2, las superficies fueron: ‘dilatación/contracción de longitudes debido a aumento/disminución de la temperatura’ y ‘aumento/disminución de temperatura debido a absorción/cesión de calor’. Las estructuras consideradas fueron dos rectas que se cortan con pendientes del mismo signo y dos rectas que se cortan con pendientes de diferente signo. En lo que sigue, nos referiremos a estas estructuras como ‘‘Alcanzar’’(A) y ‘‘Encontrar’’ (E) respectivamente, por analogía con los clásicos problemas de dos móviles en Cinemática (bien uno alcanza al otro, bien uno se encuentra con el otro).

Fuente: Piscinas/ Alcanzar (Fuente: Dilatación/Alcanzar)	Superficie: Piscinas (Dilatación)	Superficie: Ahorros (Calor y temperatura)
Estructura: Alcanzar	Equivalente	Isomorfo
Estructura: Encontrar	Similar	Diferente

Tabla 2: Superficies y Estructuras usados en los estudios 1 y 2 para los problemas fuente y dianas.

Variables y Medidas

En ambos estudios, los factores independientes son: la Superficie y la Estructura de los problemas diana, cada uno con 2 valores: Igual/Diferente al problema fuente. En el análisis conjunto final, la Familiaridad de los enunciados (alta/baja) fue el factor independiente.

En cada uno de los 4 problemas diana propuestos los estudiantes debían realizar varias tareas, que asociamos a variables dependientes diferentes:

1. Indicar el grado de ayuda que percibían del problema fuente. Se utilizó una escala Likert con cinco niveles: ‘Mucha, Bastante, Algo, Poco, Nada’. Esta variable pretendió medir la percepción inicial de la analogía entre cada problema diana y el problema fuente.
2. Elegir, entre tres sistemas de ecuaciones lineales, el correcto para resolver cada problema fuente (solo una opción era correcta). Esta variable está asociada con la fase de aplicación de la transferencia, una vez acabada la construcción de la analogía entre el problema ‘diana’ y el ‘fuente’. Fue valorada como ‘Correcta’ o ‘Incorrecta’.

Procedimiento

En cada estudio utilizamos dos sesiones de unos 50 min cada una. En la primera sesión explicamos la finalidad de la tarea que llevarían a cabo y se explicó el material didáctico para activar los conocimientos ya estudiados. En la segunda sesión realizamos la prueba de “transfer”.

Resultados

Familiaridad y elección de ecuaciones

La Figura 1 refleja la proporción de acierto en la elección del sistema de ecuaciones en función de la Estructura, Superficie y Familiaridad del problema diana. Lo más destacable es que los resultados para los problemas diana en la condición baja familiaridad son sistemáticamente peores que los obtenidos para los problemas diana en la condición alta familiaridad. El factor Familiaridad no alcanza significatividad, seguramente debido al tamaño reducido de la muestra, ya que la significación queda muy cercana al límite admitido ($t(31,9) = 1,853$, g.l. corregidos por varianzas no iguales, $p = 0,07$). El efecto principal de la Estructura igual/diferente al problema fuente es significativo en este estudio conjunto ($Z = -2,583$; $p = ,01$). El efecto de la Superficie no es significativo.

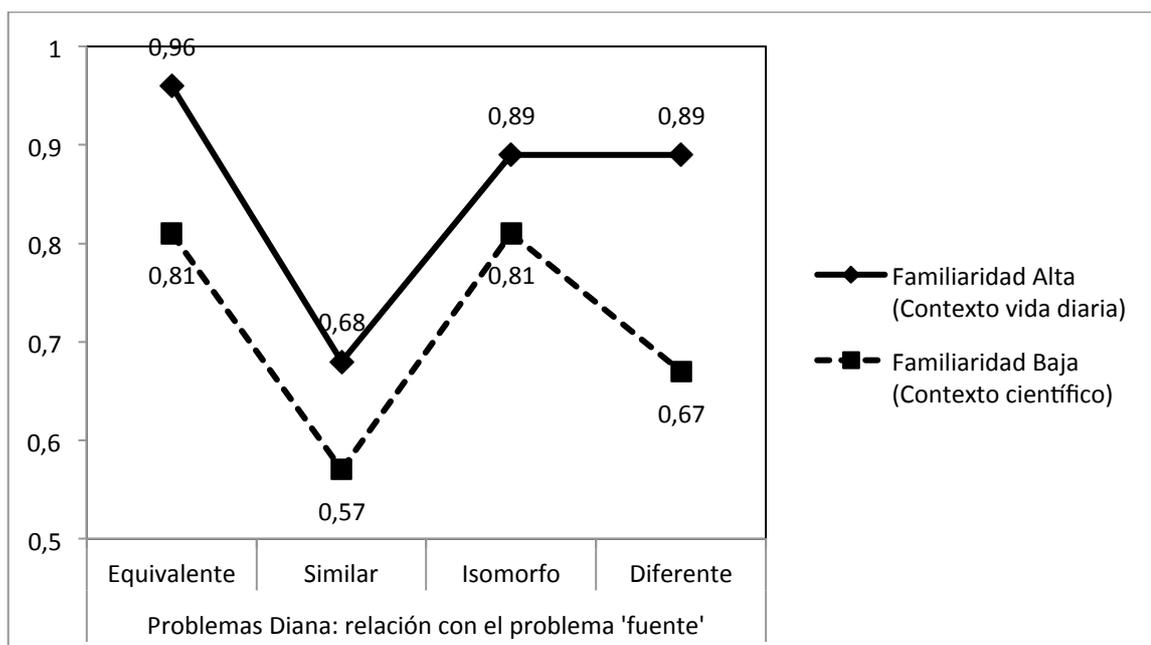


Figura 1. Proporciones de éxito en la elección del sistema de ecuaciones para resolver cada uno de los problemas diana en ambas condiciones de familiaridad.

Hay una diferencia significativa entre los 4 problemas ($Q=13,481$; $p=,004$), debido a la menor proporción de éxito de los problemas ‘similares’ en comparación con el resto de problemas diana. En la condición de Alta Familiaridad, la diferencia es muy apreciable. En la condición de Baja Familiaridad el resultado es parecido al obtenido en el problema ‘diferente’ y peor que el de los otros dos problemas diana.

Estudio de la detección de analogías

La tabla 3 muestra la proporción de acierto en el sistema de ecuaciones en función de la detección de analogías/diferencias estructurales. En ambas condiciones de familiaridad existe una fuerte relación entre detectar las diferencias/ analogías estructurales y escoger correctamente la ecuación que resuelve el problema.

	Detección Igual Estructura <i>Isomorfo</i>		Detección Diferente Estructura <i>Similar</i>	
Ecuaciones Correctas	Si	No	Si	No
Si	74,4%	14,0%	69,4%	11,1%
No	7,0%	4,6%	13,8%	5,5%

Tabla 3: Porcentaje de acierto en la elección de ecuaciones en función de la correcta detección de estructura igual o diferente.

La mayoría de las personas que detectan correctamente la analogía/diferencia estructura escogen en la segunda fase la ecuación que resuelve correctamente el problema con indiferencia de la condición de familiaridad.

Conclusiones

La proporción de éxito en la elección de las ecuaciones en los problemas diana es, globalmente, alta. Esto apoya la instrucción habitual en las aulas basada en ejemplos análogos resueltos, aun así los problemas de igual estructura resultan más fáciles que los de estructura diferente.

El efecto de la igualdad /diferencia entre estructuras produjo efecto significativo. Lo estudiantes tienen más dificultades a la hora de transferir el planteamiento de un problema no isomorfo con el problema diana. El efecto de la Superficie no alcanzó significatividad, pero se encontró un resultado distinto para cada nivel de familiaridad. En problemas de alta familiaridad, las similitudes superficiales pueden obstaculizar la detección de diferencias estructurales entre problemas. En todo caso, el problema Similar alcanzó menores niveles de éxito que el resto, incluso que el Diferente, en ambos niveles de familiaridad. El error más común fue el transfer negativo. La hipótesis H1 quedó confirmada para el factor Estructura.

El efecto del factor familiaridad quedó cerca del límite estándar de significatividad. Por tanto la hipótesis H2 quedó “casi” confirmada a falta de mayor potencia estadística.

Por último se encontró una asociación entre la detección de similitudes/diferencias estructurales y la elección de ecuaciones correcta. Por tanto, la detección de analogías estructurales es un buen predictor del éxito algebraico. H3 quedó confirmada.

Referencias

- Barnett, S.M. y Ceci, S.J. (2002). When and where do we apply what we learn? A taxonomy for far transfer. *Psychological Bulletin*, 128(4), 612-637.
- Bassok, M. y Holyoak, K. J. (1989). Interdomain transfer between isomorphic topics in algebra and physics. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 15, 153-166.
- Bernardo, A.B.I. (2001). Analogical problem construction and transfer in mathematical problem solving. *Educational Psychology*, 21(2), 137-150
- Byrnes, J. P. (1996). *Cognitive development and learning in instructional contexts*. Boston, MA: Allyn & Bacon.
- Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121-152.
- Forbus, K.D., Gentner, D. y Law, K. (1995). MAC/FAC: A model of similarity-based retrieval. *Cognitive Science*, 19, 141-205.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.
- Friege, G. y Lind, G. (2006). Types and qualities of knowledge and their relation to problem solving in physics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4, 437-465.
- Gentner, D. (1983). Structure-mapping. A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, 7, 155-170.
- Gick, M. L., y Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem solving. *Cognitive Psychology*, 12, 306-355
- Gick, M.L. y Holyoak, K.J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, 15, 1-38

- Greeno, J.G. (1989). Situations, Mental Models, and Generative Knowledge. En D. Klahr and K. Kotovsky (Eds.), *Complex Information Processing: The Impact of Herbert Simon* (pp. 285-318). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum Associates.
- Hammer, D., Elby, A., Scherr, R. y Redish, E. (2005). Resources, framing and transfer. En J. Mestre (Ed.), *Transfer of learning from a modern multidisciplinary perspective* (pp. 89-119). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Hesse, M.B. (1966). *Models and analogies in science*. Notre Dame, IN: Notre Dame University Press.
- Holyoak, K.J. (1984). Analogical thinking and human intelligence. En R.J. Sternberg (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence* (Vol. 2, pp. 199-230). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Holyoak, K.J. y Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. *Memory & Cognition*, 15(4), 332-340.
- Hummel, J.E. y Holyoak, K.J. (1997). Distributed representations of structure: A theory of analogical access and mapping. *Psychological Review*, 104, 427-466.
- Jonassen, D.H. (2003). Using cognitive tools to represent problems. *Journal of Research on Technology in Education*, 35(3), 362-381.
- Kintsch, W. y van Dijk, T. A. (1978). Toward a model of discourse comprehension and production. *Psychological Review*, 85, 363-394
- Kintsch, W. y Greeno. J. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109-129.
- Kintsch, W. (1998). *Comprehension: a paradigm for cognition*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- Larkin, J. y Reif, F. (1979). Understanding and teaching problem solving in physics. *European Journal of Science Education*, 1(2), 191-203.
- Lobato, J. E. (2003). How Design Experiments Can Inform a Rethinking of Transfer and ViceVersa. *Educational Researcher*, 32(1), 17-20.
- Newell, A. y Simon, H.A: (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Novick, L. (1988). Analogical transfer, problem similarity, and expertise. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 14, 510-520.
- Oliva, J. M. (2004). El pensamiento analógico desde la investigación educativa y desde la perspectiva del profesor de ciencias. *Revista electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 3(3), Artículo 7. Recuperado el 1 de julio de 2007, Disponible online en: www.saum.uvigo.es/reec/volumenes/volumen3/Numero3/ART7_VOL3_N3.pdf.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press (2ª ed., 1973). (Trad. castellana: 1981, *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trias).
- Rebello, N. S., Cui, L., Bennet, A. G., Zollman, D. A. y Ozimek, D. J. (2007). Transfer of learning in problem solving in the context of mathematics and physics. En D. Jonassen (Ed.), *Learning to solve complex scientific problems*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum.
- Reed, S.K., Dempster, A. y Ettinger, M. (1985). Usefulness of analogous solutions for solving algebra word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 11, 106-125.
- Reed, S.K. (1987). A structure-mapping model for word problems. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition*, 13, 124-139
- Reeves, L.M. y Weisberg, R.W. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin*, 115, 381-400.

- Sanjosé, V., Solaz-Portolés, J.J. y Valenzuela, T. (2009). Transferencia inter-dominios en resolución de problemas: una propuesta instruccional basada en el proceso de “traducción algebraica”. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(2), 169-184.
- Schroeder, T., y Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. Trafton y A. Shulte (Eds). *New directions for elementary school mathematics (1989 Yearbook)*. Reston, VA, NCTM.
- Solaz-Portolés, J. J. y Sanjosé, V. (2006). Problemas algorítmicos y conceptuales: Influencia de algunas variables instruccionales. *Educación Química*, 17(3), 372-378.
- Solaz-Portolés, J.J. y Sanjosé, V. (2007). Cognitive variables in science problem solving. *Journal of Physics Education On Line*, 4(2), 25-32.
- Tversky, A. (1977). Features of similarity. *Psychological Review*, 84, 327-352.
- Van Dooren, W., De Bock, D. y Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de Linealidad. *INDIVISA. Boletín de Estudios e Investigación, Monografía IV*, 115-138 (Hay una versión precedente del 2003 en *Educational Studies in Mathematics*, 53, 113-118).