

## DE LA SUMA “DETERMINÍSTICA” A LA SUMA ALEATORIA : UNA TRANSICIÓN CON DIFICULTADES

Raúl Katz<sup>1,2</sup> – Marta Massa<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Facultad Regional Rosario –Universidad Tecnológica Nacional – Argentina

<sup>2</sup>Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura – Universidad Nacional de Rosario

[rdkatz@fceia.unr.edu.ar](mailto:rdkatz@fceia.unr.edu.ar) – [mmassa@fceia.unr.edu.ar](mailto:mmassa@fceia.unr.edu.ar)

Campo de investigación: Probabilidad, estadística y combinatoria; Nivel educativo: Superior

### Resumen

Se reporta un estudio exploratorio, de tipo cualitativo e interpretativo, del razonamiento de estudiantes universitarios ante problemas que requieren la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (SVAIID). Se discuten comparativamente los resultados de la resolución de un mismo problema realizada por tres grupos (I, II y III). Sobre el grupo III se aplicó una secuencia didáctica diseñada para generar una ruptura con el pensamiento puramente determinístico. Los resultados muestran que la mayoría de los estudiantes de los grupos I y II consideran válida la propiedad  $\sum_{i=1}^n X_i = nX_i$  para tales variables, situación que se constituye en un obstáculo para internalizar el concepto de SVAIID. Esto se atenúa significativamente en el Grupo III, permitiendo reconocer aspectos de interés didáctico en la estrategia aplicada.

### Introducción

En las últimas décadas ha crecido notablemente el interés por la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística, incorporándose de forma generalizada, no solamente a las diferentes carreras universitarias, debido a su carácter instrumental para otras disciplinas, sino también en la currícula de la escuela media<sup>1</sup>. Esto fue acompañado por un impulso en las investigaciones educativas. Estudios sobre el razonamiento aleatorio ha tenido un gran auge en el campo de la Psicología. Kahneman, Slovic, y Tversky (cit. en Díaz Godino et al., 1996) han puesto de manifiesto la existencia de errores sistemáticos, con sesgos en la intuición ante situaciones de tipo probabilístico, siendo uno de los más estudiados la heurística de la representatividad. Fischbein y Gazit (cit. en Serrano et al., 1998) analizaron otro error típico denominado “falacia del jugador”. Estos sesgos no son ajenos a nuestros alumnos. Entre otros errores encontramos: la identificación de sucesos excluyentes con independientes, la asociación condicionalidad – causalidad, la no aceptación de que un suceso posterior sea condicionante de uno anterior, coincidiendo con resultados comunicados por Sánchez (1996). Un error que nos ha interesado indagar por su reiteración en distintos ámbitos universitarios, está relacionado con la suma de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (SVAIID). Este error se suele encontrar ante problemas como el siguiente:

*El espesor de una lámina metálica en mm. es una variable aleatoria  $X$  normalmente distribuida con  $\mu_X = 0.05$  y  $\sigma_X = 0.05$ . El espesor de una lámina de papel aislante en mm. es una variable aleatoria  $Y$  normalmente distribuida con  $\mu_Y = 0.05$  y  $\sigma_Y = 0.02$ . Expresar el espesor del núcleo de un transformador que consta de 50 capas de láminas metálicas y 49 láminas de papel aislante.*

<sup>1</sup> Actualmente, en Argentina, la escuela media comprende el 3º ciclo de la Enseñanza General Básica y la Educación Polimodal

Ante esta propuesta los estudiantes incurren en el error de interpretar dicho espesor a través de la variable  $50X+49Y$  en lugar de  $\sum_{i=1}^{50} X_i + \sum_{i=1}^{49} Y_i$  (donde  $X_i$  e  $Y_i$  denotan respectivamente las variables aleatorias espesor de la  $i$ ésima lámina metálica y espesor de la  $i$ ésima lámina de papel aislante).

Se presenta en este reporte el avance de la investigación, que forma parte de una tesis de maestría, en la que se analizan las actuaciones de los estudiantes ante problemas que requieren la SVAIID, sus razonamientos, los posibles obstáculos y el efecto de secuencias didácticas que permitan contribuir a superar tales dificultades en el aula. La investigación está orientada a encontrar respuestas a los siguientes interrogantes:

- ¿es el error que se observa consecuencia de la ruptura que se produce cuando se introduce el razonamiento aleatorio en un proceso de enseñanza y aprendizaje en el cual predomina el razonamiento deductivo o enfoques algorítmicos?
- ¿existen aspectos del lenguaje que afectan el aprendizaje?

### **Algunos referentes teóricos que orientan la investigación**

En el contexto didáctico, Brousseau (1983) establece “...en un análisis didáctico, los errores no son entendidos como meras fallas de los alumnos sino más bien como síntomas de las naturalezas de las concepciones que subyacen en sus actividades matemáticas”. En este sentido la noción de error está relacionada con la noción de obstáculo epistemológico desarrollada por Bachelard (1938). Es así que el error se constituye en un elemento sobre el cual debe operarse a nivel de enseñanza para contribuir a sus superación efectiva.

Brousseau otorga al obstáculo el carácter de conocimiento y no una falta de él, atribuyéndole un rol importante en la adaptación de respuestas ante situaciones nuevas, la resistencia manifiesta ante contradicciones y su persistencia e interferencia esporádica aún cuando se lo haya reconocido. Brousseau distingue tres tipos de obstáculos:

- ✓ ontogenéticos: debidos a las características del desarrollo del individuo.
- ✓ didácticos: resultantes de las elecciones al establecer la situación de enseñanza.
- ✓ epistemológicos: intrínsecamente relacionados el significado del concepto.

Asumimos que la construcción de un conocimiento no es lineal, sino compleja, con avances y retrocesos, continuidades y rupturas, en función de los obstáculos encontrados y la manera de actuar ante ellos. El conocimiento previo es determinante en el progresivo dominio de un campo conceptual, pero también puede, a veces, ser un impedimento. En la enseñanza es preciso identificar aquellos conocimientos previos que pueden actuar como enlace cognitivo y aquéllos sobre los que hay que provocar las rupturas necesarias para evitar se constituyan en obstáculos epistemológicos.

### **Diseño de la investigación**

**Metodología:** De acuerdo con la naturaleza del objeto de estudio: *la actuación de los estudiantes ante diferentes tipos de problemas que impliquen la SVAIID*, la implementación metodológica adoptada para el desarrollo de la tesis es esencialmente cualitativa, con un enfoque interpretativo, si bien se efectúan algunos análisis porcentuales sobre las características definidas. El mismo supone que las personas actúan en función de sus creencias, conocimientos previos y valoración, con formas de pensamientos y estrategias construidas dentro de una dinámica de experiencias enriquecidas o empobrecidas por la mediación de otros durante el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Su comportamiento y sus acciones tienen siempre un sentido, un significado que debe ser develado en el propio proceso de la investigación.

El perfil interpretativo que se adoptó implicó enfoques:

- a) del análisis del discurso, para estudiar las producciones escritas de los estudiantes y las transcripciones de registros orales grabados,
- b) de la investigación - acción en el aula a fin de registrar y contrastar información dentro de los contextos académicos en que se produce la actividad de enseñanza - aprendizaje. La misma se desarrolló en el espacio físico y académico de un Taller de Estadística y Probabilidad, gestionado en la Facultad Regional Rosario para el desarrollo de la tesis, ofrecido a estudiantes que cursaron la asignatura pero no la aprobaron.

En el Taller se revisaron los contenidos de la asignatura, se indagaron las formas de razonamiento asociadas con la SVAIID y se generaron permanentemente acciones deliberadas y estratégicamente planificadas con el propósito de promover nuevas conceptualizaciones o modificar las concepciones erróneas. Se procuró que las propuestas de aprendizaje fueran accesibles y desarrollaran la autoconfianza en el estudiante.

El lenguaje fue considerado un elemento importante en el desarrollo del Taller. Por tal motivo, se incitó a los estudiantes para que permanentemente explicitaran sus ideas, ya sea en forma verbal o escrita, por considerarse que las manifestaciones lingüísticas y los acontecimientos que tenían lugar en la interacción didáctica eran determinantes de lo que aprendían. La aparición y puesta de manifiesto de un error posibilitó la reflexión crítica, la corrección permanente (aunque fuera colectiva) y fue el punto de partida para posteriores actividades.

Asimismo se los comprometió a explicitar sus puntos de vista y a la vez analizar con atención las ideas de sus compañeros. Esta instancia los obligó a reflexionar sobre sus propios errores y sobre los errores ajenos, lo cual resultó propicio para que comenzaran a apropiarse parcialmente de los conceptos y símbolos del tema.

La comprensión de un concepto abstracto, como lo es el de la SVAIID y el manejo de su simbología, requiere que se respeten los tiempos de los estudiantes. Por ello la actividad del Taller procuró respetar sus tiempos de aprendizaje. Lo importante era la construcción de los conocimientos sobre la base de responsabilidades compartidas.

Se utilizaron diferentes técnicas para recoger información, a saber:

Etapa I: exploratoria de tipo diagnóstica para sondear los conocimientos previos y formas de razonamiento al iniciar el Taller y que podían incidir en la estructuración de los conceptos de SVAIID. Se aplicó un cuestionario con algunos ítems que se tomaron de estudios realizadas por Lecoutre, Fischbein y Konold (cit. en Serrano et al., 1998).

Etapa II: seguimiento de la evolución de los aprendizajes de los contenidos previos a la SVAIID. Se analizó la resolución de problemas especialmente diseñados.

Etapa III: momento central de la investigación en el cual se trabajó con la SVAIID. Se registró la resolución de problemas realizada por los alumnos del Taller, con distintos formatos (lingüístico, simbólico y gráfico), luego de desarrollar sistemáticamente estrategias didácticas específicamente diseñadas para superar los obstáculos detectados. Primero se analizó la resolución de problemas realizada por todos los alumnos del Taller a fin de identificar las actitudes para afrontar los problemas, los procedimientos de resolución, las hipótesis formuladas y las concepciones que puedan obstaculizar o favorecer sus resoluciones. Se compararon las actuaciones con las realizadas al resolver los mismos problemas por estudiantes, de la FCEIA (Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura – UNR) en dos momentos diferentes: uno, inmediatamente después de la enseñanza del tema SVAIID en el aula en un curso regular<sup>2</sup>, permitiendo

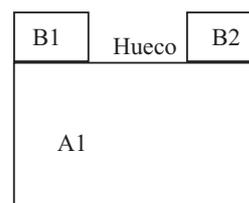
<sup>2</sup> Se entiende por curso regular a aquel que se desarrolla en el tiempo y modalidad de cursado teórico-

el trabajo a “carpeta abierta” y, otro, inmediatamente después de aprobar la asignatura Probabilidad y Estadística en una mesa de examen. Estos últimos grupos respondieron a una enseñanza tradicional, desarrollada en los tiempos académicos y apoyados por los materiales didácticos y la bibliografía de la cátedra. Este análisis comparativo, se complementó con un estudio de casos sobre 8 estudiantes del Taller, tratando de abarcar con un enfoque holístico un amplio espectro de situaciones problemáticas. En este reporte se presentan los resultados de la instancia comparativa de la etapa III.

**Sujetos:** Se trabajó con tres grupos de estudiantes universitarios. El grupo I estuvo compuesto por 10 estudiantes del Profesorado y de la Licenciatura en Matemática de la FCEIA, que cursaban la asignatura Probabilidad y Estadística. El grupo II estuvo integrado por 12 estudiantes de Ingeniería Civil y Agrimensura de la FCEIA, que accedieron a participar al concluir el examen final de la asignatura homónima. El grupo III estaba integrado por 28 estudiantes de Ingeniería Química, Mecánica y Eléctrica de la Facultad Regional Rosario (UTN), que participaban del Taller. Los contenidos y la bibliografía utilizada por los tres grupos eran equivalentes.

**Instrumento:** Para el estudio comparativo se utilizó el siguiente problema extraído de Montgomery y Runger (1996), con ligeras variaciones para salvar cuestiones de traducción. El problema presenta una gráfica que reproduce la situación presentada con un texto en el cual se utilizan notaciones simbólicas y números. Tiene una estructura *dato-pregunta/consigna*. Sólo se proporciona la información necesaria y suficiente.

*Sobre un bloque de tipo A se colocan dos bloques de tipo B (denotados con B1 y B2) como se muestra en la figura. El ancho de los bloques de tipo A varía aleatoriamente con media 10 y desviación estándar 0.5. El ancho de los bloques de tipo B varía aleatoriamente con media 3 y desviación estándar 0.3. Sea Z la variable aleatoria ancho del hueco comprendido entre los bloques B1 y B2. Calcule E (Z) y V (Z)*



**Aplicación del instrumento y procesamiento de la información:** El problema fue aplicado a los tres grupos quienes tuvieron media hora para resolverlo. Para el análisis de las producciones escritas se definieron a priori las siguientes dimensiones y categorías. Las modalidades surgieron del análisis de los protocolos de resolución:

Dimensiones	Categorías	Modalidades
Definición expresa de las variables “componentes” de una muestra aleatoria simple	Expresión del <i>ancho de los dos bloques</i> como variable	Lo expresa previo a definir la variable ancho del hueco
		Lo expresa cuando necesita definir la variable ancho del hueco
		No expresa
Definición de una muestra aleatoria simple	Define las variables $B_i$ ó $Y_i$ (DV)	Define
		No define
		No corresponde
Expresión de una variable aleatoria como función de otras	Expresión del <i>ancho del hueco</i>	Expresa
		No expresa.
	Expresión del <i>ancho total de dos bloques de tipo B</i> (AT)	$2B$ ó $2Y$
		$B_1+B_2=2B$ ó $Y_1+Y_2=2Y$
	$B_1+B_2$ ó $Y_1+Y_2$	

práctica establecido en las planificaciones anuales para el plan vigente.

Aplicación de propiedades	Aplicación de la propiedad de la esperanza	Aplica correctamente
		Aplica incorrectamente o no resuelve
	Aplicación de la propiedad de variancia (PV)	Aplica correctamente
		Aplica incorrectamente o no resuelve
Hipótesis involucradas	Valoración de la hipótesis de la independencia de variables en el cálculo de la variancia (VHI)	Valora explícitamente
		No valora o no resuelve
	Incorporación de hipótesis ad-hoc (HAD)	Incorpora
		No incorpora
Inclusión de elementos confusos (no claros) en el proceso de resolución		Presencia de elementos
		Ausencia

Las producciones escritas fueron analizadas, asociando las modalidades correspondientes a las distintas categorías, organizándose las matrices de datos de cada grupo, a través del consenso previamente logrado entre ambos investigadores.

### Resultados e interpretación de los mismos

En el siguiente cuadro se sintetizan los resultados encontrados para las categorías donde se pudieron detectar actuaciones diferentes, significativas para su análisis comparativo:

Categoría	Modalidades	Grupo I (10 casos)	Grupo II (12 casos)	Grupo III (28 casos)
HAD	incorpora	2 (20%)	2 (17%)	3 (11%)
	no incorpora	8 (80%)	10 (83%)	25 (89%)
AT	2B ó 2Y	9 (90%)	4 (33%)	6 (21%)
	$B_1+B_2=2B$ ó $Y_1+Y_2=2Y$	0 (0%)	2 (17%)	1 (4%)
	$B_1+B_2$ ó $Y_1+Y_2$	1 (10%)	6 (50%)	21 (75%)
DV	define	1 (10%)	2 (17%)	6 (21%)
	no define	0 (0%)	7 (58%)	15 (54%)
	no corresponde	9 (90%)	3 (25%)	7 (25%)
PV	correcto	7 (70%)	8 (67%)	22 (79%)
	incorrecto-no responde	3 (30%)	4 (38%)	6 (21%)
VHI	valora	4 (40%)	3 (25%)	3 (11%)
	no valora-no resuelve	6 (60%)	9 (75%)	25 (89%)

Los resultados muestran diferencias de actuación en los tres grupos. El Grupo I, a pesar de trabajar a “libro abierto”, comente un error común en el 90% de los casos: expresan la variable *ancho total de dos bloques de tipo B* como  $2B$  ó  $2Y$  siendo  $B$  ó  $Y$  el ancho de un bloque de tipo  $B$ . En el grupo II este error se presenta sólo en el 50 % de los casos y en el grupo III se reduce al 25 %. Las justificaciones de los estudiantes en las entrevistas sugieren, para el Grupo I, que no están considerando variables aleatorias, sino entidades fijas, determinadas y genéricas: el *ancho* de un bloque es considerado como una propiedad propia del bloque y no una característica cuyos valores observados en la totalidad de los bloques se distribuye siguiendo cierto comportamiento. Esto puede interpretarse como la persistencia de un razonamiento de tipo determinístico que actúa como obstáculo para captar el carácter aleatorio de la variable *ancho*. Ante la intervención del investigador para que se analice qué ocurriría si se midiesen los anchos de los bloques, los estudiantes son capaces de reconocer que no necesariamente serán iguales, si bien persiste la dificultad para expresarlo con una notación formal.

En relación con la categoría AT, se observa que los estudiantes del Grupo I reflejan claramente el razonamiento determinístico mencionado al expresar el ancho total de dos bloques como  $2B$  ó  $2Y$ . En el Grupo II se reduce esta tendencia como consecuencia de una mayor experiencia adquirida durante el cursado completo de la asignatura y un estudio integrador de la misma para la instancia de examen final. El Grupo III muestra una superación de este obstáculo promovido intencionalmente en el Taller y las múltiples situaciones didácticas abordadas en el mismo. En un menor porcentaje, se registran estudiantes de los Grupos II y III que expresan  $B_1+B_2=2B$  ó  $Y_1+Y_2=2Y$ . Esto se interpreta como la dificultad para diferenciar variables aleatorias idénticamente distribuidas, que tienen en el caso de las variables continuas la misma curva de densidad, con variables aleatorias iguales. Esta dificultad se reduce ostensiblemente en el grupo III que ha tenido más oportunidades para reflexionar al respecto.

Se observa una significativa mejora (uso de expresiones correctas  $B_1+B_2$  ó  $Y_1+Y_2$ ) como consecuencia de la metodología específica del Taller.

Otra dificultad generalizada se observa en la definición de las variables aleatorias cuando éstas constituyen una muestra aleatoria simple de otra variable. Los alumnos, por lo general, no definen las variables  $Y_i$  : ancho del *i*ésimo bloque. En algunos casos ni siquiera las expresan simbólicamente, pero introducen sus esperanzas y variancias al resolver el problema. Esto merece ser profundizado en la investigación indagando las relaciones entre la conceptualización y la simbolización ya que, según señala Duval (1999), la aprehensión conceptual de un objeto es inseparable del desarrollo de simbolismos específicos para representarlo, efectuándose el desarrollo de las representaciones mentales como una interiorización de las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos.

Otro error, no frecuente pero común en los tres grupos, es suponer distribución normal para aquellas variables aleatorias en que sólo se explicitan su esperanza y variancia o desviación estándar, como si éstos fuesen datos exclusivos de tal distribución.

Los alumnos de Ingeniería muestran una tendencia bastante generalizada a priorizar el resultado de una operación al aplicar una propiedad, y no las condiciones bajo las cuales ese resultado tiene sentido. La mayoría de estos alumnos no explicitan la hipótesis de independencia entre variables aleatorias al calcular la variancia de una suma.

### **Conclusiones**

En relación a la SVAIID, las actividades desarrolladas en el taller y el tiempo destinado a reflexionar e interpretar han sido el puente para la aprehensión de un concepto que presenta dificultades intrínsecas. Estas reflexiones no siempre las realiza un alumno durante su estudio independiente en un formato tradicional de una clase expositiva, acotada en el tiempo en función del contenido curricular. Los estudiantes que centran su aprendizaje en un proceso de “autogestión parcial” suelen desplazar la labor interpretativa por una ejercitación prolongada que afianza la rutina, en desmedro de una comprensión. Cuando esto ocurre la frecuencia de aparición del error es mayor. La comprensión de la SVAIID no se genera de manera rápida, sino que se va construyendo paso a paso en el transcurso del tiempo. Exige que los estudiantes interactúen entre sí y con el profesor para promover la negociación de significados.

En algunos casos se observa en las producciones escritas de los estudiantes el logro de manipulaciones simbólicas que les permite obtener respuestas apropiadas, pero en el momento de las entrevistas se pudo constatar que éstas no se corresponden con un aprendizaje significativo. La creencia de que se comprende porque se tiene posibilidades de calcular constituye un obstáculo para mejorar o alcanzar la conceptualización. Consideramos que desde lo didáctico deben promoverse procesos

reflexivos de modo que los estudiantes sometan a análisis al propio pensamiento y así validar o modificar sus propias concepciones. Es en este marco donde debe identificar los obstáculos y generar la ruptura con el pensamiento puramente determinístico para dar lugar a una estructura más amplia que incluya el pensamiento aleatorio y de este modo transitar de la “suma determinística” a la suma aleatoria.

### **Bibliografía**

Bachelard, G. (1980). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 65-198.

Díaz Godino, J., Batanero, M. C., Cañizares M. J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid, España: Síntesis.

Montgomery, D., Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística Aplicadas a la Ingeniería*. México: McGraw Hill.

Sánchez, E. (1996). *Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato: Un estudio de casos*. Tesis de Doctorado, Instituto Politécnico Nacional, México.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. y Cañizares, M. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico. *Revista de Educación Matemática*, 10 (1), 7-23.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos de aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle.