DISTINTAS FORMAS DE PENSAR EL INFINITO. CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Virginia Montoro(1) - Nora Scheuer(2)
(1) Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue (Rep. Argentina)
(2) CONICET – Universidad Nacional del Comahue (Rep. Argentina)
vmontoro@crub.uncoma.edu.ar - vmontoro@gmail.com

Campo de Investigación: Pensamiento Matemático Avanzado ; Nivel Educativo: Superior
Palabras clave: infinito / concepciones / universidad / clasificación

Resumen
Se realizó una clasificación de 120 estudiantes de distintas carreras universitarias en base a sus concepciones sobre la noción de infinito matemático. Se utilizó un método de clasificación jerárquica, posterior a un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) de estos sujetos descriptos por sus respuestas a un cuestionario escrito, individual que indaga sobre está noción; resultando una clasificación en 4 clases. Presentamos la caracterización de las mismas y las posibles ideas asociadas a cada grupo de sujetos, ya sean estas correctas o alternativas; también la vinculación de estas con la carrera que cursan y avance en la misma. Ilustramos cada clase con las justificaciones literales dadas por los sujetos más representativos a fin de mostrar con las propias palabras de los estudiantes las ideas características de las distintas grupos.

INTRODUCCIÓN

En la matemática de los primeros años de universidad se trabaja con diversos conceptos que involucran la noción de infinito como un punto destacable y problemático; este concepto suele utilizarse con diversos significados, ya sea para señalar un *proceso,* como para identificar un *atributo* o como un *objeto.* Es habitual que estos usos y significados se planteen sin un trabajo previo, simultáneo o posterior , como si esta noción resultara parte del sentido común, o fuese "transparente" para la comprensión de los estudiantes.

Sin embargo la historia de las matemáticas nos muestra que el infinito matemático es un concepto poco accesible para la intuición, y que en esta ciencia implicó más de 2000 años de trabajo para ser precisado formalmente mediante la axiomatización. Este concepto, a partir del siglo XX, posee una estructura formal innegable para la mayoría de los matemáticos, sin embargo esto no implica que se haya vuelto más accesible para los estudiantes. En realidad, las estructuras cognoscitivas de estos, construidas a partir de las experiencias cotidianas y escolares con cantidades finitas, no favorecen la asimilación del concepto; más bien se constituyen en un obstáculo para alcanzarlo (Waldegg, 1993).

En las últimas décadas, con el desarrollo de estudios en educación matemática, varios autores, como Fischbein y cols. (1979), Sierpinska (1985), Cornu (1983), Moreno y Waldegg (1991, 1995), Waldegg (1993) o Artigue (1995), han observado que los estudiantes suelen presentar una comprensión lábil del infinito matemático y que en muchos casos apelan a ideas contradictorias y tienen serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con problemas que implican esta noción (Montoro y de Torres Curth, 1999).

En un trabajo previo al presente realizamos un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM) de las respuestas a un cuestionario aplicado a alumnos universitarios de distintas carreras y niveles de avance en las mismas (sin agrupaciones *a priori*) y que indagaba sobre aspectos básicos de la noción de infinito cardinal como son: la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinaciones de un número finito de elementos; la distinción entre infinito y mucho o muy grande y la distinción entre infinito y todo. Mediante este análisis pudimos identificar grupos de estudiantes a los que podían asociarse ciertas concepciones sobre el infinito matemático. Pudimos observar que en el aprendizaje del infinito intervienen procesos semióticos que requieren de la participación en contextos educativos que propicien un alto grado de reflexión matemática (Montoro, 2003). Estos resultados previos hicieron que nos interesásemos en este nuevo estudio, focalizado en establecer alguna tipología de los estudiantes universitarios respecto de sus concepciones sobre estas nociones.

***Objetivo*:** Realizar un clasificación de estudiantes universitarios respectos a sus concepciones sobre aspectos básicos de la noción de infinito matemático. Acotamos el estudio de las concepciones de estos alumnos respecto a aspectos simples de esta noción que no involucren cuestiones o notaciones formales que puedan operar como dificultades suplementarias. Estos son: i) la posibilidad de obtener una colección infinita a partir de combinaciones de un número finito de elementos; ii) la distinción entre infinito y mucho o muy grande y ii) la distinción entre infinito y todo.

METODOLOGIA

Instrumento de indagación

En vistas a obtener un instrumento que facilitase el estudio en profundidad de las concepciones de los estudiantes acerca de este concepto, se elaboró una serie de preguntas focalizadas de opción múltiple, para ser contestadas en forma individual y por escrito (ver Tabla I en anexo). Las preguntas fueron diseñadas de modo que cada una presentase sólo una opción de respuesta correcta. A fin que la elección de la respuesta a modo cerrado fuera suficientemente informativa para nuestros objetivos, la formulación de las preguntas se basó en el análisis cualitativo de las respuestas de otros estudiantes de primer año de diferentes carreras a un cuestionario preliminar con preguntas abiertas.

Participantes

Ciento veinte alumnos de la Universidad Nacional del Comahue, elegidos teniendo en cuenta la carrera en que estaban inscriptos y el grado de avance en la misma. Se consideró alumno/a ingresante a quienes se encontrasen asistiendo al cursillo de ingreso de su respectiva carrera y avanzado/a a quienes estuviesen cursando las últimas materias de la misma. Se eligieron tres carreras en las cuales el conocimiento matemático presenta una relevancia diferente: Profesorado en Matemática, Licenciatura en Biología y Profesorado de Educación Física (en el sentido de corporal). En la primera se brinda una fuerte formación matemática, llegando, los alumnos de los últimos años a tener un contacto formal con el concepto de infinito; en la segunda se cursan dos asignaturas de matemática superior, sin que ésta sea una disciplina central y por último en Educación Física, la formación matemática es elemental. Los participantes fueron 60 alumnos ingresantes y 60 alumnos avanzados, distribuidos equitativamente en cada una de las tres carreras. El género y las edades quedaron libradas al azar[i].

Procedimientos de análisis

Teniendo en cuenta la gran cantidad de datos con que se contaba, las respuestas a este cuestionario fueron previamente analizadas mediante un Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples (AFCM)[ii] (Benzécri, 1973). Habiendo partido de los sujetos sin clasificar, este análisis nos brindó sugerencias respecto de grupos de estudiantes que compartían las ideas respecto de los aspectos indagados en el cuestionario como así también de posibles relaciones de esos grupos de estudiantes que responden en forma similar el cuestionario y su formación matemática. Posteriormente y tomando a las sujetos descriptos por sus coordenadas en los 4 ejes principales del

AFCM (factores de variabilidad de los modos de respuestas) realizamos una clasificación de los estudiantes.

En forma sintética el método utilizado consiste en un *método jerárquico ascendente* (Ward, 1963) que comienza con una partición del conjunto de los 120 sujetos de manera que cada uno de los sujetos sea el único elemento de una clase y en cada iteración se agrupa en una nueva clase aquellas dos "*más parecidas" (semejantes)*, en el sentido que posean casi las mismas asociaciones con los modos de respuesta. El investigador selecciona en qué iteración cortará el proceso, de manera tal que la conformación de las distintas clases, así obtenidas, tenga sentido en términos del estudio realizado.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Analizando el histograma de índices de nivel[iii] correspondiente a la clasificación jerárquica, pudo observarse que a partir de la iteración 235 se agrupan individuos (o grupos de individuos) muy distantes entre sí, por lo que podemos pensar en la conveniencia de hacer una partición en 5, 4 o 3 clases (interrumpiendo las iteraciones en la 235, 236 o 237 respectivamente). Se consideró, como la más conveniente, la clasificación en 4 clases, dado que en la clasificación en tres clases, se observó que se fusionaron las que más adelante se denominan C3 y C2, cuya distinción nos interesó mantener. En la clasificación en cinco clases aparecen clases análogas a las C1, 3 y 4 y la C2 se separa en dos grupos, extrayéndose de ella un grupo de estudiantes que responden NS a las preguntas 4 y 5.

Caracterización de las clases

En la Tabla II presentamos para cada clase resultante, las modalidades de respuesta más frecuentes; las de menor frecuencia; las modalidades de caracterización asociadas; el porcentaje de sujetos que hay en cada clase y un listado de los sujetos mas representativos, (a cada sujeto se le asignó un identificador en el cual la primera letra designa la CARRERA a la cual pertenece el estudiante -B para Biología, M para matemática y EF para Educación Física - y a continuación una I o A según sea Ingresante o Avanzado luego del guión un número que responde al orden en que se lo introdujo en la base de datos).

Tabla II: Modalidades de respuestas más frecuentes y menos frecuentes, ideas asociadas a estas, modalidades de caracterización. (a) Porcentaje aproximado de sujetos que hay en cada clase.

	Modalidades de respuesta asociadas	**CARACTERIZ.**	**%** [(a)]	**Sujetos más representativos**	**cla/mod -mod/cla**
C1	P9P; P10M; P1NS; P2NS; P4S; <u>P8M;</u> P3N; P5N	E1: entre 17-19 años; INGRESANTES. Se opone a: AVANZ.	20%	EFI-09; EFI-20; MIN-04; BIN-O1; BIN-13; MIN-06; EFI-04; BIN-12; EFA-06	33% 61% 28% 74%
C2	P1N; P8I; P9M; P7M; <u>P3S</u>	ED. FISICA	27%	MIN-16; MIN-18; EFI-07; EFA-01; EFI-10; EFA-03; MIN-17; EFI-13;EFI-11	45% 54%
C3	P8NC; P10N	BIOLOGÏA (¿?)	6%	BIN-15; BAV-03; BAV-04; BIN-07; BAV-05; EFA-08;	
C4	<u>P2S; P7P;</u> <u>P8M</u> ; <u>P9I;</u> <u>P10I;</u> <u>P1S</u>	E3; 24 años o más; MATEMATICA	47%	MIN-1; MAV-6; MAV-01; MAV-18; MAV-07; MAV-14; MAV-02; MAV-19	66% 40% 70% 49%

A continuación realizaremos una caracterización de las clases, presentando las ideas asociadas a los modos de respuesta característicos de cada clase (comparar Tablas I y II); las modalidades de caracterización correspondientes y el porcentaje de sujetos que hay en cada una de ellas. Por último, ilustraremos cada clase con las justificaciones literales dadas por alguno de los sujetos más representativos de esa clase, con el sólo efecto de mostrar con las propias palabras de los estudiantes las ideas que inferimos como características de las distintas grupos de sujetos.

Clase 1: ***No hay infinito posible.*** Correspondiente al 20% de los sujetos, caracterizada por INGRESANTES MENORES DE 19 AÑOS. Tiene asociadas las siguientes ideas

- *no es* posible *con un número finito de elementos (aunque grande y que se repitan) obtener una colección infinita de combinaciones.*
- *con pocos- poco; con muchos-mucho*
- si una colección se presenta como infinita*, en ella debe estar todo*.

Clase 2: ***Infinito es un número enorme.*** Correspondiente al 27% de los sujetos, caracterizada por la carrera de ED. FISICA. Tiene asociada la idea:

- identificación *de infinito con mucho*

Clase 3: ***Con muchísimos elementos me problematizo.*** Correspondiente al 6% de los sujetos, la mayoría estudiantes de Biología. Tiene asociada la idea:

- con muchos elementos de partida me problematizo y no se cual es la extensión de la colección.

Clase 4: ***Puedo tener*** **Infinito**. Correspondiente al 47% de los sujetos, caracterizada por Estudiantes AVANZADOS DE MATEMÁTICA. Tiene asociada la siguiente idea:

- con un número finito de elementos, que se pueden repetir, puedo obtener infinitas combinaciones

Justificaciones literales de los sujetos más representativos:

Clase 1: No hay infinito posible. Sujeto EFI-09

P1NS: *Se podrían realizar más tareas pero no sé si llegaría a 200.000 tareas.*
P2NS: No Justifica
P3N: *Si probamos* ***con todas*** *las posibilidades alguna sería igual. Ahora si obviamos algunas posibilidades no sería infinito.*
P4S: *Porque las letras corresponden a J/U/A/N/M/A/R/I/A/N/O.*
P5N: *Porque si las teclas del abecedario son 28 tiene un límite, o sea que la combinación también tiene un límite.*
P6N: *Porque estamos* ***quitando*** *posibilidades.*
P7P: ***Estamos retirando*** *muchas posibilidades de combinación.*
P8M: *Tendremos muchas combinaciones pero seguimos teniendo limitaciones, por ejemplo no repetir palabras.*
P9M: *Porque tenemos limitaciones en la cantidad de letras.*
P10M: *Sería muy difícil contar todas las combinaciones.*

Las justificaciones de este estudiante hacen patente *la imposibilidad de crear una infinidad a partir de un número finito de elementos* (tomado como una restricción). La mayoría de las justificaciones (en negrita) ponen en evidencia la identificación de *infinito con todo.*

Clase 2: Infinito es una cantidad enorme. Sujeto EFI-10

P1N: *Porque una máquina necesita un idioma rico en palabras para poder realizar tareas y no creo que pueda con solamente tres teclas.*
P2N: *Porque para poder dar una denominación correcta se necesitan* ***más*** *letras.*
P3NS: No Justifica
P4N: *Porque en todo caso estaría la combinación anan que es diferente.*
P5S: *Se pueden lograr infinitas combinaciones*.
P6N: *No porque se sacarían* ***muchas*** *alternativas.*
P7P: *Tendrá pocas combinaciones porque con tan pocas teclas no podrá hacer mucho.*
P8I: *Tendrá* ***infinitas*** *combinaciones.*
P9M: *Tendrá muchas combinaciones.*
P10I: *Tendrá* ***infinitas*** *combinaciones*

En las justificaciones de este estudiante (la negrita es mía) se observa claramente *la identificación de infinito con mucho.* Expresa que para obtener infinitas combinaciones no alcanza con *pocas* letras, se necesitan *más;* y que si quito *muchas* ya no tendré i*nfinitas*. En cambio cuando tengo muchos elementos (15.000.000) en P8 y P10 si obtengo *infinitas* (se repitan o no).

Clase3: Con muchísimos elementos me problematizo. Sujeto BI-7

P1S: *Se podría hacer si existiera o si pudiéramos hacer otro tipo de combinaciones agrupando de a más letras*
P2N*: Pienso que el idioma de máquina es de tipo código pero que no es posible porque tiene que haber una información o una tarea.*
P3S*: Porque quedan más letras que se pueden combinar.*
P4S*: Si están en la palabra JUANMARIANO*
P5NS*: Será un número muy elevado por todas las posibles combinaciones*
P6NS*: Porque ya se está determinando un límite*
P7P*: Va a tener pocas porque no permite alguna de ella*
P8M*: Son muchas por la cantidad de teclas pero no infinitas ya que hay algunas que no se pueden repetir*
P9I*: Porque se pueden hacer más combinaciones con las 3 teclas*
P10NC*: No justifica*

Este estudiante al enfrentarse con todas las combinaciones de muchísimos elementos que se repiten prefiere no contestar, sin embargo responde y justifica todas las otras. Encontramos que algunas respuestas (P9I- P2N) son contradictorias y que las justificaciones en general no aportan claridad a sus respuestas.

Clase 4: Puedo obtener infinito. Sujeto MAV-01

P1S: *Con sólo dos teclas puedo tener infinitas combinaciones, (como con 0 y 1 en el sistema binario).*
P2S*: Al tener infinitas combinaciones siempre se puede crear una combinación para una nueva tarea.*
P3S: *Al nuevo idioma podría sacarle las combinaciones que empiecen con A e igual sería infinito.*
P4S: *Si están las infinitas combinaciones posibles ananá será una de ellas.*
P5S: *Si se cuentan las combinaciones de dos letras y con una a al final . Se pueden agregar infinitas A por lo tanto tiene infinitas combinaciones.*
P6N: *282+283+............+2820.*
P7P: *Son 15 combinaciones.*
P8M*: Lo mismo que en 8.*
P9I: *3+32+33+....+3n+.....*
P10I: Igual 10

Este último estudiante justifica y con gran explicitación todas las respuestas. Se puede observar que expresa sin dudas la *idea con un número finito de elementos puedo obtener infinitas combinaciones (teniendo en cuenta que se puedan repetir).* Las justificaciones a P3, P4 y P6 no aportaría claridad respecto a una posible asimilación de infinito a todo.

CONCLUCIONES

Nuestro estudio realizado en un contexto "hipotético cotidiano" de conteo, nos muestra que la mayoría de los ingresantes y de los estudiantes sin una instrucción específica formal sobre el infinito matemático, poseen ideas confusas y contradictorias frente a esta noción; incluso en aspectos muy elementales como la extensión de colecciones de combinaciones de un número finito de elementos que pueden repetirse. Este aspecto de la influencia del contenido sobre el razonamiento de los jóvenes y adultos sumado a que los estudiantes parecen ser muy propensos a confiar en sus presunciones y las experiencias cotidianas sugiere que una razón de las dificultades para aprender estos conceptos no es solamente su complejidad sino que no tengan un trato explícito y formal con estos conceptos.

Vale decir, que el supuesto imperante en la enseñanza de la matemática universitaria en el que se trata con el concepto de infinito como "transparente" y accesible directamente, en el conocimiento de los estudiantes, puede convertirse en una seria dificultad en el aprendizaje de los conceptos relacionados con el infinito, por lo que se presentaría como necesaria, en la enseñanza matemática en los primeros años de la universidad, una explicitación de las nociones que atañen al infinito matemático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1995). *La enseñanza de los principios de cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. Ingeniería. Didáctica en Educación Matemática, Artigue, Douady, Moreno, Gómez (Eds). Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. pp 97-140.

Benzécri, J. (1973). *L' Analyse des Dones. Tomo 1: La taxinomie. Tomo 2: L' Analyse des Correspondances.* Paris, Francia: Dunod. (segunda edición 1976).
Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Comceptions et Obstacles*, Thése de Doctorat, Grenoble.

Fischbein, E.; Tirosh, D.; Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics, Vol 10*, 3-40

Monaghan, J. (2001). Young People's Ideas of Infinity. *Educational Studies in Mathematics 48,* 239 – 257.

Montoro, V. (2003). *Estudio sobre concepciones de estudiantes universitarios respecto de la noción de infinito matemático*. Tesis de Maestría. Univ. Nac. del Comahue. Argentina.

Montoro, V., de Torres Curth, M. (1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en aprendizaje de la matemática. *Epsilon 15(45),* 357-364.

Moreno Armela L. y Waldegg. G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics. Vol. 22.* (211-231).

Moreno Armela L. y Waldegg, G. (1995). Variación y representación: del número al continuo. *Revista de Educación Matemática.* Vol 7. Nº1. pp 12-28. México.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*. Vol 6, nº 1. pp.5-67.

Waldegg, G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l`instruction. *Annales de Didactiques es de Sciences Cognitives* 5 pp19-36. IREM de Strsdbourg.

Ward, J. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal American Statistic Association 58*. pp 236-244

---

[i] De los 120 participantes, 64 eran mujeres (F) y 56 hombres (M); 42 estudiantes tenían entre 17 - 19 años (E1), 43 estudiantes, entre 20 - 23 años (E2) y 35 estudiantes, 24 años o más (E3).
[ii] El detalle de la aplicación de este método, o una mayor profundización de la técnica del mismo se puede encontrar en: Lebart, Morineau y Fénelon (1979) o en Crivisqui (1993). El AFCM se realizó con el programa SPAD.N versión 2.5 P. C. (DECISIA, 1994).
[iii] Este índice es una medida de la distancia entre sujetos o grupos de sujetos que se fusionan en la iteración correspondiente.