

# DIAGRAMAS PRODUCIDOS POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA EN PROBLEMAS DE COMPARACIÓN MULTIPLICATIVA<sup>1</sup>

Fany Markela González y Enrique Castro

Universidad de Granada

## Resumen

*En este trabajo analizamos las respuestas dadas por estudiantes de educación secundaria a la traducción de dos problemas verbales de comparación multiplicativa a representación simbólica y gráfica. Hemos categorizado las respuestas en la traducción del problema verbal a una representación simbólica y a una representación gráfica, lo que nos ha permitido elucidar categorías para cada tipo de representación, e hipotetizar indicios de prioridad y subordinación entre ellas. Los participantes fueron 89 estudiantes sin preparación previa y a quienes se les aplicó una prueba que consta de dos problemas con dos apartados cada uno: en el primer apartado se pide a los estudiantes que resuelvan el problema a partir de un enunciado verbal y, en el segundo, que utilicen un diagrama para representar las relaciones existentes en el enunciado del problema. Los resultados muestran que: a) un buen número de estudiantes realizan de forma correcta la traducción del enunciado verbal a la expresión simbólica; b) los estudiantes tienen dificultad para traducir el enunciado verbal a un diagrama, incluso después de haber resuelto el problema de forma correcta, c) el diagrama lo dibujan a partir de la solución que han obtenido y no del problema mismo, y d) en estos niveles hay estudiantes que cometen el error de inversión al resolver un problema de comparación con enunciado inconsistente y, en el dibujo, mantienen el error de inversión.*

*Palabras clave:* problemas verbales, comparación multiplicativa, diagramas, representación simbólica, representación gráfica.

## Abstract

*This paper analyzes the answers given by high school students to the translation of two multiplicative comparison word problems to symbolic and graphical representation. We have categorized the responses in translating the word problem to symbolic representation and a graphical representation, which has allowed us to elucidate categories for each type of representation, and hypothesize indication of priority and subordination among them. Participants were 89 students without prior preparation and those who had a test consisting of two problems with two sections each: the first section asks students to solve the problem from an utterance and in the second, using a diagram to represent the relationships in the problem statement. The results show that: a) a number of students correctly perform the translation of verbal statement to the symbolic expression b) students have difficulty translating the verbal statement to a*

---

<sup>1</sup> Trabajo realizado dentro del proyecto EDU2009-11337 "Modelización y representaciones en educación matemática" financiado por el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación (España) y cofinanciado con fondos FEDER de la Comunidad Europea.

*diagram, even after solving the problem of how correct, c) draw the diagram from the solution obtained and not the problem itself, and d) at these levels there are students who make the reversal error in solving a problem compared to inconsistent statement, and in the drawing, maintain the reversal error.*

*Keywords:* word problems, multiplicative comparison, symbolic representation, graphical representation.

En este estudio pretendemos indagar si los estudiantes de primeros cursos de educación secundaria son capaces de hacer diagramas que integren las relaciones que aparecen en los datos del problema y verlo a través de las distintas formas en las que este grupo de estudiantes traducen un enunciado verbal a simbólico y gráfico.

Esta idea la vamos a analizar contextualizada en problemas de comparación multiplicativa con referente desconocido, que son problemas que plantean cierta dificultad de comprensión y que ocasionan dan lugar a que los resolutores cometan errores en la resolución, siendo el más típico el llamado error de inversión (Lewis y Mayer, 1987). Para ello realizamos un análisis de las producciones y los errores cometidos en dichas traducciones.

Debido a que la resolución de problemas no es fácil para muchos estudiantes, hay estudios que han propuesto formas para superar las dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de resolver problemas. Algunos investigadores han descrito la resolución de problemas matemáticos como una de las áreas más difíciles para los estudiantes (Puig y Cerdán, 1988). El desarrollo de habilidades de los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas ha sido un tema importante (por ejemplo, Pólya, 1945; Schoenfeld, 1985).

Lewis y Mayer (1987) realizaron un estudio para determinar qué aspectos de los problemas de comparación eran más difíciles para los estudiantes universitarios y encontraron que el error de inversión fue cometido en estos niveles, este hecho se produce cuando el estudiante resuelve un problema con la operación inversa a la que debe ser, es decir multiplica en lugar de dividir o viceversa y suma en lugar de restar o viceversa y cuyos resultados muestran que estos estudiantes cometen más errores de inversión en problemas con enunciado inconsistente que en problemas con enunciado consistente. De hecho varios estudios han demostrado que los problemas verbales de comparación que exigen la misma operación matemática no siempre son iguales en dificultad (Cummins, Kintsch, Reusser y Weimer, 1988; Riley y Greeno, 1988; Stern, 1992).

Muchos han sido los estudios realizados acerca de la resolución de problemas verbales de comparación en matemáticas encontrándose éstos entre los más difíciles para los estudiantes. (Lewis y Mayer, 1987; Weinberg, 2007). Debido a su complejidad lingüística y matemática, los estudiantes tienen dificultades para entender y resolver estos problemas. (Lewis y Mayer, 1987). A partir de estos resultados nuestro estudio pretende comprender mejor las operaciones mentales que los estudiantes de los primeros niveles de secundaria llevan a cabo cuando resuelven problemas de comparación multiplicativa.

### **El uso de diagramas en los problemas verbales**

El contenido visual-espacial de las matemáticas es amplio e incluye conceptos relacionados con la geometría y sentido espacial, medición, razonamiento, las estadísticas, la visualización de los objetos y la representación gráfica de datos

numéricos en matemáticas que ayudan a los estudiantes en la resolución de problemas. (Lowrie, 1996).

El NCTM sugiere que, en las normas y principios para la enseñanza de las matemáticas las formas en que las ideas matemáticas son representadas es fundamental para saber cómo las personas comprenden y utilizan esas ideas (NCTM, 2000). “los estudiantes necesitan desarrollar y utilizar una variedad de representaciones de ideas matemáticas a modelos de problemas... se debe utilizar representaciones informales, tales como el dibujo, para poner de relieve las diversas características de los problemas... estas representaciones sirven como herramientas para pensar y resolver problemas. También ayudan a los estudiantes a comunicar su pensamiento a los demás” (pág. 206).

Uno de los principales elementos a estudiar es el uso de las representaciones visuales, como es el caso de los diagramas, en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en resolución de problemas (Booth y Thomas, 2000; Diezmann y English, 2001, y Novick, Hurley y Francis, 1999). Entre las primeras investigaciones que han hecho hincapié en la importancia de cultivar en los estudiantes capacidades en el uso de la heurística, que incluye la promoción de diagramas tenemos el trabajo de Pólya (1945), y en un estudio posterior, Schoenfeld (1985) confirma la eficacia de la heurística y el uso de diagramas como estrategia para la resolución de problemas. Entre las múltiples estrategias que se han sugerido para mejorar la eficacia en la solución de problemas de matemáticas, el uso de diagramas ha sido descrito uno de los más eficaces. Hembree (1992) encuentra mediante el empleo del meta-análisis que el uso de diagramas fue el más eficiente entre las estrategias que se habían sugerido como ayuda para la solución de problemas.

La utilización de diagramas gráficos se remonta al trabajo de Willis y Fuson (1988) en el que mostraron la mejora en la resolución de problemas, enseñando a los estudiantes de segundo grado de educación primaria a utilizar diferentes dibujos esquemáticos para representar diferentes categorías de problemas verbales (cambio, combinación y comparación), que involucran suma y resta, encontrando que los estudiantes fueron capaces de hacer el dibujo correcto para una categoría determinada, siendo los problemas de comparación más difíciles, incluso con la ayuda de los dibujos esquemáticos. Más tarde, Marshall (1995) subraya la importancia en la utilización de diagramas como ayuda para la conceptualización de un gran número de problemas matemáticos. De este modo los problemas aritméticos de suma y resta necesitan diversos esquemas que ayuden a formarse una representación adecuada para su resolución. Los alumnos necesitan conocimiento estratégico para elegir los esquemas adecuados a los distintos tipos de problemas que mejoren la representación de los mismos (Aguilar, Navarro y Alcalde, 2003). Otros estudios han demostrado empíricamente los efectos beneficiosos de la presentación de un diagramas específico o representaciones visuales en la resolución de problemas (Ainsworth y Th Loizou, 2003; Cheng, 2004; Mayer, 2003).

Los diagramas se han utilizado como método en el proceso de resolución de problemas en distintas situaciones (Espinosa, 2004; González, 2010; Martínez, 2011).

Por otro lado, varios estudios han demostrado que los diagramas son útiles cuando los inventan los alumnos, no cuando se les proporcionan (Cox, 1999). En esa misma línea, (Castro, Morcillo y Castro, 1999) obtienen que en algunos problemas de matemáticas los estudiantes de primero de la educación secundaria obligatoria, utilizan de forma espontánea una amplia variedad de estrategias de carácter gráfico. Estudios como el de Saundry y Nicol (2006), donde presentan un proyecto que examina cómo los niños

responden cuando se les presenta un problema matemático a resolver, los tipos de imágenes que pintan de manera espontánea, las cosas que están pensando al mismo tiempo que dibujan. Han encontrado que hay niños que hacen dibujos elaborados para el más simple de los problemas, centrando su interés, por ejemplo en las pestañas de una persona que comparten los asientos en un autobús, lo que podría perder el punto matemático del problema, otros niños emplean el dibujo como un proceso que representa la solución del problema.

Otros estudios investigan los factores que promueven el uso de diagramas contruidos espontáneamente mediante el examen de las percepciones de los estudiantes y las actividades diarias de clase (Uesaka, Manalo e Ichikawa, 2007).

En las investigaciones que hasta este momento hemos revisado, observamos que algunas tratan de promover el uso de diagramas como métodos para resolver problemas otras como facilitadores del proceso de resolución, la gran mayoría promueven la instrucción para mejorar el conocimiento en el uso de diagramas, mientras que otros investigan el uso espontaneo de diagramas por parte de los estudiantes a la hora de resolver un problema de matemáticas. En este trabajo queremos ver cómo piensan los estudiantes cuando se les pide que construyan un diagrama que represente las relaciones existentes entre los datos del enunciado. Por ello nos hemos planteado un objetivo que nos permita dar cuenta de la importancia que ejercen las representaciones simbólicas y gráficas en el proceso de resolución a partir de un problema verbal de comparación multiplicativa.

### **Objetivo**

Analizar el tipo de representación simbólica y gráfica en forma de diagramas que producen estudiantes de primer curso de secundaria en la resolución de problemas aritméticos verbales de comparación multiplicativa.

### **Preguntas de investigación**

Para estudiar el papel que desempeñan los diagramas en la resolución de problemas de verbales comparación multiplicativa nos hemos planteado las siguientes preguntas: ¿Cuáles son los distintos tipos de representaciones simbólicas que emplean los estudiantes cuando resuelven problemas verbales de comparación multiplicativa de enunciado inconsistente? Y ¿Qué tipos de diagramas utilizan para representar las relaciones existentes entre los datos del enunciado verbal?

### **Método**

#### *Participantes*

En esta experiencia han participado un total de 89 estudiantes de cuatro grupos de primer curso de educación secundaria obligatoria de dos institutos públicos de la ciudad de Granada, con edades comprendidas entre 12 y 14 años, sin preparación previa al respecto para este estudio.

#### *Instrumento*

Los datos que analizamos en este trabajo los hemos obtenido del resultado parcial de un cuestionario con seis problemas y que hemos diseñado y construido para alcanzar un objetivo más amplio del que aquí tratamos. En este informe analizamos sólo los problemas 1 y 2 y sus apartados a y b, correspondientes al paso de lo verbal a lo simbólico y de lo verbal a lo gráfico, respectivamente. Es decir, tratamos de observar

cómo representan simbólica y gráficamente un problema de comparación de enunciado inconsistente a partir de un enunciado verbal. En la tabla 1 se muestran los problemas verbales de comparación multiplicativa presentados a los estudiantes.

<i>Tarea</i>	<i>Enunciado</i>	<i>Preguntas</i>
1	En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.
2	Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?	a) Resuelve el problema. b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Tabla 1. Problemas planteados a los estudiantes

Los problemas 1 y 2 del cuestionario son problemas aritméticos verbales simples de comparación multiplicativa con referente desconocido, también conocidos como problemas de enunciado inconsistente. Los dos problemas constan de dos apartados. En el primer apartado se les pide que resuelvan el problema y en el segundo que dibujen un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema.

Los problemas fueron aplicados y resueltos de forma individual en una prueba de lápiz y papel a la hora normal de clases de matemáticas y con la presencia del profesor natural y la investigadora en calidad de observadores del proceso de resolución.

## Resultados

Para cada uno de los dos problemas, hemos analizado de forma conjunta las respuestas de los estudiantes en los dos apartados correspondientes (1a con 2a y 1b con 2b), con la finalidad de categorizar las producciones desde el punto de vista simbólico y gráfico.

### *Criterios para evaluar las respuestas del paso verbal a simbólico*

En el apartado **a** hemos categorizado de forma inductiva a partir de las producciones de los resolutores las distintas formas con que traducen el enunciado verbal en una representación simbólica. Las respuestas producidas por los estudiantes han sido evaluadas en función del proceso utilizado en la traducción del enunciado a la representación simbólica, independientemente de los errores de cálculo. Para ello hemos tenido en cuenta las caracterizaciones de las fases del proceso de resolución. Para efectos de este trabajo hemos tomado en cuenta las dos fases generales utilizadas por Castro (1994), que son: la comprensión del problema y la solución del problema, tal y como se muestra en la figura 1.

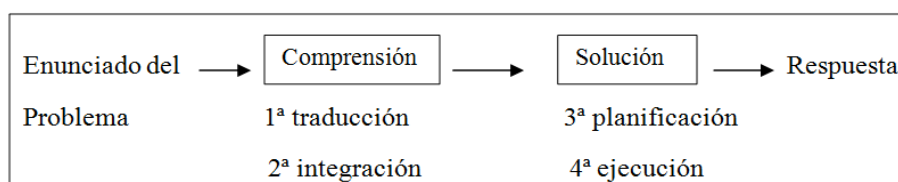


Figura 1. Fases de resolución de problemas verbales. Tomado de Castro (1994)

Como hemos expuesto antes en este estudio tomamos en cuenta sólo la fase de comprensión con las dos subetapas independientemente si cometen errores de cálculo o no.

*Establecimiento de las categorías*

A través de un proceso inductivo hemos llegado a establecer seis categorías en las respuestas producidas por los participantes al problema enunciado en el apartado **a** del cuestionario de problemas. Mediante un proceso de refinamiento progresivo hemos detectado que las categorías de respuestas de los participantes se pueden reducir a seis tipos, armonizadas en torno a tres ideas claves iniciales: ausencia de respuesta, respuesta errónea y respuesta correcta. Y dentro de cada una de ellas hemos indagado si había variantes con una significación propia diferenciada. Para el establecimiento de las categorías hemos tenido también en cuenta los tipos de errores más frecuentes que se han detectado en este tipo de problemas y que están recogidos en la literatura (Castro, Rico, Castro, 1992). Las categorías finales establecidas son:

- I<sub>1</sub>: no hay información/sin proceso de resolución; el estudiante no produce ningún tipo de registro escrito, deja el espacio en blanco y no presenta proceso de resolución.
- I<sub>2</sub>: comete error aditivo; el estudiante utiliza la suma o la resta en lugar de la multiplicación o la división, es decir, el estudiante interpreta el problema como si fuese de estructura aditiva, empleando una adición o una sustracción para resolverlo.

Ejemplo 2a: El estudiante **E-36** en la tarea 2a comete error aditivo, en este caso interpreta “7 veces” como “restar 7”, y pasa de la estructura multiplicativa a la aditiva, es decir resta  $287 - 7$  en lugar de dividir  $287 : 7$ .

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

*Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva. ¿Cuánto ahorró Eva?*

a) Resuelve el problema

$$\begin{array}{r} 287 \\ - 7 \\ \hline 280 \end{array} \quad \text{Eva ahorro } 280 \text{€}$$

Figura 2. Error aditivo del estudiante E-36

- I<sub>3</sub>: comete error de inversión; cuando el resolutor utiliza la operación inversa a la que debería utilizar, es decir emplea la multiplicación por la división o viceversa. En este caso utiliza la multiplicación en lugar de la división.

Ejemplo I<sub>3</sub>: el estudiante E-04 en la tarea 1a comete error de inversión, es decir resuelve el problema con la operación inversa, en este caso multiplica  $64 \times 4$  en lugar de dividir  $64 : 4$ .

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

*En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?*

a) Resuelve el problema

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 4 \\ \hline 248 \end{array} \quad \text{s: en el autobus viajan } 248 \text{ pasajeros.}$$

Figura 3. Error de inversión del estudiante E-04

- I<sub>4</sub>: comete error de inversión con rectificación; el estudiante anota una primera respuesta en la que comete error de inversión y a continuación tacha la respuesta que supone equivocada y resuelve nuevamente.

Ejemplo I<sub>4</sub>: El estudiante E-30 en la tarea 1a comete error de inversión con rectificación. Primeramente multiplica  $64 \times 4 = 256$ , seguido rectifica tachando todo el proceso y a continuación divide  $64 : 4 = 16$  mostrando esto como única respuesta.

En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?

a) Resuelve el problema

Figura 4. Error de inversión con rectificación del estudiante E-30

- I<sub>5</sub>: representación aritmética; cuando utilizan números y operaciones aritméticas de forma correcta para resolver el problema.

Ejemplo I<sub>5</sub>: El estudiante E-77 en la tarea 2a representa y resuelve el problema con procedimientos puramente aritméticos de forma correcta.

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

Isabel ahorró 287 euros. Ella ahorró 7 veces tanto como ahorró Eva ¿Cuánto ahorró Eva?

a) Resuelve el problema

Figura 5: Representación aritmética del estudiante E-77

- I<sub>6</sub>: representación algebraica; cuando en el proceso de resolución los estudiantes explicitan de manera correcta relaciones de carácter algebraico (ecuaciones simples) entre los datos utilizando operaciones algebraicas para resolver el problema.

Ejemplo I<sub>6</sub>: El estudiante E-69 en la tarea 1a utiliza un procedimiento algebraico y representa el problema verbal de comparación utilizando una ecuación simple.

Dado el siguiente problema enunciado verbalmente:

En un tren viajan 4 veces tantos pasajeros como en un autobús. En un tren viajan 64 pasajeros. ¿Cuántos pasajeros viajan en un autobús?

a) Resuelve el problema

Figura 6. Representación algebraica del estudiante E-69

En la tabla 2, observamos las frecuencias y porcentajes de los tipos de representaciones simbólicas producidas por los estudiantes, en la que se observa un alto porcentaje de representación aritmética correcta y la presencia errores especialmente el error de inversión.

Categoría	Descripción	Frecuencias		Porcentajes	
		1a	2a	1a	2a
I <sub>1</sub>	sin información /sin proceso de resolución	4	5	5	6
I <sub>2</sub>	error aditivo	0	2	0	2
I <sub>3</sub>	error de inversión	10	25	11	28
I <sub>4</sub>	error de inversión con rectificación	10	7	11	8
I <sub>5</sub>	representación aritmética correcta	62	47	70	53
I <sub>6</sub>	representación algebraica correcta	3	3	3	3

Tabla 2. Frecuencias de los tipos de representación simbólica

### Establecimiento de las categorías para el paso de lo verbal a lo gráfico

En el apartado **b** de los problemas 1 y 2 se les pide a los estudiantes que dibujen un diagrama a partir de un problema enunciado verbalmente. Se trata pues, de que realicen una traducción desde una representación verbal de un problema de comparación multiplicativa a un diagrama.

Hemos tomado en cuenta las categorizaciones utilizadas en estudios anteriores como las de Edens y Potter (2007), categorizan los dibujos o diagramas producidos por los estudiantes en *esquemáticos* y *no esquemáticos*. Por otra parte Uesaka, Manalo e Ichikawa (2007) los llaman *diagramas de alta calidad* y *diagramas de baja calidad*. Algunas de estas categorías pueden coincidir con nuestro análisis. Hemos establecido unos criterios en función de los cuales categorizar el nivel de respuesta. Concretamente, los criterios para analizar los diagramas producidos por los estudiantes han sido:

- 1º: Si en la respuesta aparece un dibujo o no.
- 2º: Grado de integración del problema, es decir, si se reflejan las relaciones entre las cantidades.
- 3º: Presencia o no de errores de integración del enunciado.
- 4º: Grado de abstracción de las representaciones.

De acuerdo con los dos primeros criterios hemos obtenido respuestas de los siguientes tipos:

#### ➤ Sin dibujo

- Respuestas en blanco. En este apartado están las respuestas en las que los sujetos no hacen ninguna anotación.
- Reformulación verbal del problema en forma más resumida, sintética o telegráfica.
- En forma de operador

#### ➤ Con dibujo

- Dibujo cualitativo: Si el dibujo representa sólo el contexto o los sujetos mencionados
- Dibujo cuantitativo: Si en el dibujo realizado aparece algún aspecto cuantitativo y, dentro de este nivel si:
  - Representan sólo las cantidades que se comparan o
  - Representan la relación entre las cantidades



### Descripción de las categorías

A continuación definimos las categorías establecidas anteriormente según las producciones de los estudiantes de este estudio y mostramos ejemplos de cada una de ellas, excepto las categorías sin dibujo.

- C<sub>1</sub>: sin dibujo / en blanco; no hay información, no dibuja o está en blanco.
- C<sub>2</sub>: sin dibujo/ reformulación del enunciado; el estudiante no dibuja, hace anotaciones, reescribe el enunciado en forma sintética, telegráfica, resumida.
- C<sub>3</sub>: sin dibujo/ en forma de operador.
- C<sub>4</sub>: dibujo cualitativo; dibujan personajes u objetos alusivos a la temática o el contexto del enunciado.

Ejemplo C<sub>3</sub>: El estudiante E-02 en la tarea 1b dibuja objetos y personajes alusivos a la temática en este caso dibuja autobús, tren y pasajeros.

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema



Figura 7: dibujo cualitativo del estudiante E-02

- C<sub>5</sub>: dibujo cuantitativo; los diagramas más elaborados son los que hemos denominados cuantitativos. En ellos, se observa un dibujo que refleja las dos cantidades que intervienen en el esquema de comparación (comparado y referente) y también la relación multiplicativa que existe entre ellos. Puesto que en estos dibujos se refleja la integridad del problema los denominamos *diagramas integrados*.

Ejemplo C<sub>5</sub>: El estudiante E-62 en la tarea 1b hace un dibujo con aspecto relacional, es decir dibuja en una sola figura y de mayor tamaño, el comparado (cantidad de pasajeros del tren), lo relaciona con los datos del referente (la cantidad desconocida), dibujando 4 figuras más pequeñas para representar el escalar (4 veces) y utiliza el signo de interrogación para señalar la incógnita del problema en el dibujo.

b) Dibuja un diagrama que represente las relaciones del enunciado del problema

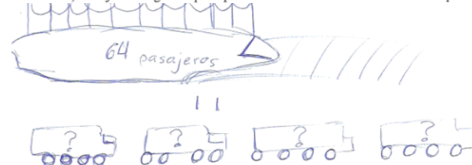


Figura 8: diagrama cuantitativo del estudiante E-62

Hemos realizado un análisis de frecuencias simples de las producciones de los estudiantes para este apartado presentados en la tabla 3.

Categoría	Descripción	Frecuencia		Porcentaje	
		1b	2b	1b	2b
C <sub>1</sub>	sin dibujo/ está en blanco	6	13	7	15
C <sub>2</sub>	sin dibujo/reformulación del enunciado	12	15	13	17
C <sub>3</sub>	sin dibujo/ esquemas de proporcionalidad	5	5	6	6
C <sub>4</sub>	con dibujo/ diagramas cualitativos	30	40	34	45
C <sub>5</sub>	con dibujo/ diagrama cuantitativo	36	16	40	18

Tabla 3: Frecuencias de los tipos de representación gráfica

Hemos observado que la frecuencia es mayor donde utilizan diagramas cualitativos que representan personajes u objetos de la temática del enunciado al igual que los dibujos en los que aparecen representadas las respuestas del problema, en otros casos el uso de otros tipos de dibujos, donde actúan como operador en ambos casos las frecuencias alcanzan poco más del 34% y 45% respectivamente. La frecuencia con la que hacen dibujos cuantitativos en el apartado 1b es mayor que en el apartado 2b, esto nos lleva a pensar que el apartado 1b es más fácil de representar en forma cuantitativa que el apartado 2b.

### Conclusiones

Exponemos por separado las conclusiones para cada uno de los apartados a y b, correspondientes a las dos preguntas planteadas.

Con respecto a las representaciones simbólicas. La mayoría de los estudiantes producen una representación aritmética correcta de los problemas, muy pocos lo dejan en blanco, se podría decir que este tipo de problemas son abordables para este nivel de alumnado. Un pequeño porcentaje de estudiantes utiliza ideas algebraicas. Se pone de manifiesto que el error de inversión se produce en estos niveles escolares. A la luz de los resultados hay algunos estudiantes que cometen el error aditivo, pero en menor medida que el error de inversión.

Con respecto a las representaciones gráficas. Una primera conclusión es que ningún alumno utiliza de forma espontánea los diagramas para resolver el problema. Una segunda conclusión es que, cuando se le pide que dibujen un diagrama hay estudiantes que no lo dibujan a partir del enunciado, sino que lo dibujan a partir de la solución. Como consecuencia de ello, mantienen en el diagrama el error de inversión que ya habían cometido al resolverlo simbólicamente. Utilizan para hacer el diagrama los datos que aparecen en la solución, sin percatarse del error una vez hecho el dibujo. Una tercera conclusión es que los estudiantes utilizan diagramas de diferentes tipos para representar el problema verbal de comparación multiplicativa, predominando el dibujo alusivo a la temática del enunciado, así como también los que en el dibujo utilizan la solución, como dato del mismo.

A pesar de que hay un alto porcentaje de estudiantes que realizan de forma correcta la traducción del problema a una solución de carácter simbólico, según los resultados obtenidos son pocos los estudiantes que hacen un diagrama que relacione las cantidades que aparecen en el enunciado del problema. Lo que nos lleva a pensar que los participantes no están familiarizados con el dibujo de diagramas que integren las relaciones existentes entre los datos del enunciado verbal del problema, y no reconocen la utilidad que puedan tener los diagramas para la resolución de problemas. Por lo que sería necesario instruirles en la construcción de diagramas integrados.

## Referencias

- Aguilar, M., Navarro, J. I. y Alcalde, C. (2003). El Uso de Esquemas Figurativos para Ayudar a Resolver Problemas Aritméticos. *Cultura y Educación*, 15(4), 385-397.
- Ainsworth, S., y Th Loizou, A. (2003). The effects of self-explaining when learning with text or diagrams. *Cognitive Science*, 27, 669-681.
- Booth, R. y Thomas, M. (2000). Visualization in mathematics learning: arithmetic problem-solving and student difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 169-190.
- Castro, E. (1994). *Niveles de comprensión en los problemas verbales de comparación multiplicativa* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.
- Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations Produced by Secondary Education Pupils in Mathematical Problem Solving. En F. Hitt, y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Castro, E, Rico, L. y Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin and K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth PME* (Vol. 1, pp. 113-120). Durham, NH (USA): University of New Hampshire.
- Cheng, P. C. H. (2004). Why diagrams are (sometimes) six times easier than words: benefit beyond locational indexing. In A. Blackwell, K. Marriott, y A. Shimojima (Eds.), *Diagrammatic representation and inference, third international conference, diagrams*, LNAI 2980 (pp. 242-254). Heidelberg: Springer.
- Cox, R. (1999). Representation construction, externalized cognition and individual differences. *Learning and Instruction*, 9, 343-363.
- Cummins, D., Kintsch, W., Reusser, K., y Weimer, R. (1988). The role of understanding in solving word problems. *Cognitive Psychology*, 20, 405-438.
- Diezmann, C. M., y English, L. D. (2001). Promoting the use of diagrams as tools for thinking. En A. A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The Roles of Representation in School Mathematics* (pp. 77-89). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Edens, K., y Potter, E (2007). The Relationships of Drawing and Mathematical problem Solving: Draw for Math Tasks. *Studies in Art Education A Journal of Issues and Research*. 48(3), 282-298.
- Espinosa, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- González, F. (2010). *Iniciación a la resolución de problemas de álgebra escolar a través de un método gráfico. Un estudio de casos* (Trabajo de fin de máster). Universidad de Granada.
- Hembree, R. (1992). Experiments and relational studies in problem-solving - a metaanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 242-273.
- Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students' miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.
- Lowrie, T. (1996). The use of visual imagery as problem-solving tool: Classroom implementation. *Journal of Mental Imagery*, 20, 127-140.
- Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

- Martínez, M. (2011). *Utilización del Método Geométrico Lineal (MGL) para la Resolución de Problemas de Álgebra Elemental* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.
- Mayer, R. E. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.
- NCTM. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Traducción al español, Sociedad Andaluza de educación Matemática Thales. Sevilla: Proyecto Sur.
- Novick, L. R., Hurley, S. M., y Francis, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory y Cognition*, 27, 288–308.
- Pantziara, M., Gagatsis, A. y Elia, I. (2009). Using diagrams as tool for the solution of non-routine mathematical problems. *Educ. Stud. Math*, 72, 39-60.
- Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Puig, L. y Cerdán, F (1988). *Problemas Aritméticos Escolares*. Madrid: Síntesis.
- Saundry, C., y Nicol, C. (2006). Drawing as Problem-Solving: Young Children's Mathematical Reasoning through Pictures. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 57-63). Prague.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.
- Stern, E. (1992). Why do children solve nonsense problems? Understanding and solving arithmetic word problems from a psychological point of view. *Der Mathematikunterricht*, 4, 7-29.
- Uesaka, Y., Manalo, E., y Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instructions*, 17, 322-335.
- Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. In T. Lamberg y L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. [CD-ROM] Lake Tahoe, NV: University of Nevada-Reno.
- Willis, G.B. y Fuson, K.C. (1988). Teaching Children to Use Schematic Drawings to Solve Addition and Subtraction Word problem. *Journal of Educational Psychology*, 80(2), 192-201.