# VALOR ABSOLUTO: ANÁLISIS DE CONCEPCIONES ERRÓNEAS

Medina Perla, Astiz Mercedes, Oliver María, Rocerau María, Valdez Guillermo, Vecino María, Vilanova Silvia
Universidad Nacional de Mar del Plata – Argentina
pmedina@mdp.edu.ar
Campo de investigación: Errores en el aprendizaje de conceptos matemáticos
Palabras clave: error, concepto, valor absoluto, alumnos universitarios

## RESUMEN

En este trabajo se presentan los resultados de la etapa exploratoria de un estudio sobre errores que involucran el concepto de valor absoluto. Los participantes fueron alumnos que cursaban la primera asignatura de matemática de las carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Su objetivo fue indagar los errores más frecuentes en el uso de este concepto. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron: producciones escritas de los alumnos; registros de observación no sistemática de la actividad en clase y entrevistas semi-estructuradas. Los resultados obtenidos sugieren que los errores más frecuentes se relacionan con conceptos erróneos o incompletos, asociaciones incorrectas y dificultades en la comprensión del lenguaje.

## INTRODUCCIÓN

El estudio de las concepciones erróneas en Matemática es una cuestión de permanente interés, tiene una larga historia y numerosos antecedentes de investigación en distintos países. La investigación actual sobre los errores en Educación Matemática, los considera como parte normal de los procesos de aprendizaje (Brousseau et al. 1986, en Rico, 1995) y muestra un interés creciente por lograr un esquema claro de interpretación y previsión de las concepciones inadecuadas (Radatz, 1979; Mulhern,1989, en Rico, 1995) y por hacer una clasificación de los errores sobre las base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos (Movshovitz-Hadar et al.1987).

Según Resnik (1989), los errores deben ser vistos como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, además de reorientar la comprensión de los alumnos.

Vinner (1987, en Gutiérrez , 1995) distingue entre la imagen que posee un individuo sobre un concepto y el concepto en sí. En matemática, por ejemplo, un concepto está dado por su definición, con todo lo que ello involucra, mientras que la imagen de un concepto, es la idea que la persona se hace del mismo y que no necesariamente coincide con él.

Durante varios años se detectaron, de manera sostenida, dificultades en alumnos universitarios para la resolución de situaciones que involucran el concepto de *valor absoluto*, aún cuando se observara que resolvían correctamente inecuaciones del tipo $|3x-2|<8$.

Estas observaciones informales nos hicieron pensar, en principio, que la mayoría de los alumnos sólo se mueve "con éxito" en actividades que pueden ser resueltas con la aplicación mecánica de las propiedades del valor absoluto, aunque no hayan elaborado totalmente el concepto.

Teniendo en cuenta que el valor absoluto es un recurso básico que debería estar disponible para abordar otras cuestiones fundamentales, como por ejemplo límite y continuidad, es que surge el interés por indagar las causas de esta situación y generar propuestas que contribuyan a mejorarla.

En este trabajo presentamos los resultados de la etapa exploratoria de un estudio más amplio sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de valor absoluto, cuyo objetivo fue detectar posibles obstáculos y dificultades en la elaboración de este concepto, en alumnos de distintas carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

## OBJETIVO DEL TRABAJO

Detectar, analizar y clasificar los errores más frecuentes relacionados con la elaboración del concepto de valor absoluto, en alumnos universitarios del primer año de las carreras de profesorado y licenciatura de Matemática y Biología.

## METODO

Participantes: 400 alumnos que cursan la primera asignatura de Matemática de las carreras de la facultad cuyos contenidos incluyen temas básicos de cálculo diferencial e integral de una variable. (Año 2004: 220 alumnos y año 2005: 180 alumnos)

Instrumentos y técnicas: para recolectar datos se diseñó la siguiente propuesta de actividades a ser resuelta de manera individual, con el objetivo de hacer explícitas dificultades vinculadas al concepto de valor absoluto:

Nombre y apellido Carrera

1- Defina con sus palabras valor absoluto de un número real.

2- ¿Es cierto que si **a** es menor que cero, su valor absoluto es el opuesto de **a**? ¿por qué?

3- ¿Es cierto que si **a** <0, $|a| = -a$ ? ¿por qué?

4- ¿Es cierto que existe algún número **a** , tal que $|a| < 0$ ? ¿por qué?

5- Coloque <, > ó = de manera que las afirmaciones sean verdaderas:

**a<0** , entonces **–a.....0**
**a>0** , entonces **–a.....0**
$|\quad| = -$ , entonces, **a.....0**

6- Complete las líneas de puntos para que las afirmaciones siguientes resulten verdaderas:

**a** $\geq$ **0**, entonces, $|a| = \ldots\ldots$

**a<0**, entonces, $|a| = \ldots\ldots$

7- Proponga, en los casos que sea posible, valores reales para **a** y **b** que verifiquen cada una de las siguientes expresiones:

| | **a** | **b** |
|---|---|---|
| **a-b>0 y a>0** | | |
| **a-b<0 y a>0** | | |
| **-a>0 y b<0 y b-a<0** | | |
| **a<0 y b>0 y a-b>0** | | |

Los datos obtenidos a partir de esta propuesta de actividades fueron complementados con información proveniente de observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de revisión de evaluaciones parciales anteriores. Se registraron, a partir de la observación en clase, las preguntas, comentarios, actitudes de los alumnos que se consideraron significativas para el objetivo de este estudio

## TRATAMIENTO DE LOS DATOS

A partir de todos los datos obtenidos,

- se establecieron categorías de respuestas para las preguntas 1, 2, 3, y 4 de la propuesta de actividades.
- se clasificaron como correctas o incorrectas las respuestas a los ítems 5, 6 y 7.
- se confeccionó un listado de las dificultades más frecuentes inferidas a partir de las observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de la revisión de la evaluación parcial.

Las categorías establecidas para las respuestas dadas a los ítems 1 a 4 son:

Del ítem 1: *Defina con sus palabras valor absoluto de un número real*

D: “distancia de un punto al cero”

DEF: $|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$,
P: “es la parte positiva del número”,
S: “es el número sin importar el signo”,
I: incorrectas sin relación con el concepto,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 2: ¿Es cierto que si **a** es menor que cero, su valor absoluto es el opuesto de **a**? ¿por qué?

O: opuesto de un negativo es siempre positivo
D: distancia es siempre positiva
E: error en interpretación del opuesto
DEF: mostrando la definición como función por tramos
M: mal justificado,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 3: ¿Es cierto que si $a < 0$, $|a| = -a$ ? ¿por qué?

O: opuesto de un negativo es siempre positivo
DEF: mostrando la definición como función por tramos
OS: $a < 0$ entonces $-a > 0$
E: error en interpretación del opuesto
M: mal justificado,
NR: no respondieron

Justificación del ítem 4: ¿Es cierto que existe algún número a, tal $|a| < 0$ que ? ¿por qué?

D: “valor absoluto es distancia y distancia es positiva”,
P: “el valor absoluto es siempre positivo”,
S: “el valor absoluto es el número sin signo”, y lo relacionan con mayor que cero,
I: justificación incorrecta sin relación con el concepto,
M: mal justificado,
NR: no respondieron

En la siguiente tabla se muestra, por ítem, los porcentajes de respuestas de cada categoría:

| **Item 1** | 2004 (n=220) | 2005 (n=180) | **Item 2** | 2004 (n=220) | 2005 (n=180) | **Item 3** | 2004 (n=220) | 2005 (n=180) | **Item 4** | 2004 (n=220) | 2005 (n=180) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | 40,91 | 46,67 | O | 11,36 | 16,11 | O | 19,09 | 18,89 | D | 17,27 | 11,11 |
| DEF | 3,64 | 3,33 | D | 18,18 | 17,22 | DEF | 4,55 | 6,11 | P | 48,18 | 47,22 |
| P | 12,73 | 11,67 | E | 9,09 | 8,89 | OS | 6,82 | 7,22 | S | 2,27 | 1,67 |
| S | 14,55 | 11,11 | DEF | 19,55 | 18,33 | E | 41,82 | 45 | M | 4,55 | 3,33 |
| I | 19,09 | 18,89 | M | 25,00 | 18,33 | M | 11,82 | 9,44 | I | 8,64 | 9,44 |
| NR | 9,09 | 8,33 | NR | 16,82 | 21,11 | NR | 15,91 | 13,33 | NR | 19,09 | 27,22 |

Respecto de las respuestas dadas a los ítems 5, 6 y 7, se determinó:

Item 5: tanto en el 2004 como en el 2005, un alto porcentaje de los alumnos (alrededor del 70%), respondió correctamente el inciso a), alrededor del 100% respondió bien el inciso b), pero no sucedió lo mismo con el inciso c), en el cual respondieron bien apenas la mitad de ellos.

Item 6: en ambos años respondieron bien alrededor de un 70% el inciso a), mientras que la mayoría respondió mal el inciso b)

Item 7): en ambos años se registró un gran número de respuestas incorrectas al inciso c) (más del 80%), no evidenciándose inconvenientes en la resolución de los otros incisos.

Analizando en conjunto las respuestas a las preguntas 1 y 4, se infiere coherencia en las mismas e, independientemente de la definición que dieran sobre valor absoluto, reconocen que es un valor positivo.

Un análisis similar se realizó con las respuestas a las preguntas 2 y 3, constatando que la mayoría puede dar una justificación correcta a la consigna expresada en forma coloquial, mientras que no lo logra si la consigna está dada en forma simbólica. Interpretan que el número **–a** resulta negativo sólo por estar precedido por el signo menos. Esto último se ve nuevamente reflejado en las respuestas a los ítems 5, 6 y 7.

De las observaciones de la actividad de los alumnos en clase y de la revisión de la evaluación parcial, surgió que los alumnos:

- aplican mecánicamente las propiedades: si $|x| < r$, entonces $-r < x < r$

  si $|x| > r$, entonces $r < x$ ó $x < -r$
- no se permiten considerar que un número expresado como –a puede ser positivo
- resuelven incorrectamente operaciones aritméticas y algebraicas
- no verifican las soluciones obtenidas

## CONSIDERACIONES FINALES

De acuerdo con los datos obtenidos a partir de los instrumentos y técnicas puestas en práctica, surge que los alumnos, en su mayoría:

a) tienen dificultades en interpretar comunicaciones dadas en lenguaje simbólico, particularmente no pueden admitir que un número expresado como –a pueda ser positivo,

b) pueden resolver mecánicamente “con éxito” ecuaciones sencillas que involucran valor absoluto, utilizando reglas que en ese contexto funcionan, aunque no puedan justificarlas.

Las dificultades y errores observados pueden tener su origen en concepciones erróneas, que seguramente vienen arraigadas desde los niveles educacionales anteriores y probablemente están ocasionadas por asociaciones incorrectas y/o dificultades en el lenguaje simbólico. Hacer que desaparezcan concepciones erróneas de esas características no es sencillo, ni se logra a corto plazo. Brousseau (1976) plantea que “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertitud, del azar sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos”. Es necesario entonces, a fin de superar los obstáculos, plantear situaciones nuevas, en diferentes contextos, que permitan plantear la necesidad de reconsideración o rechazo del concepto para construirlo correctamente.

En este sentido, se propone continuar la investigación realizando un estudio de casos en profundidad a fin de avanzar en la determinación de las causas de las dificultades detectadas y elaborar actividades para revertirlas.

## BIBLIOGRAFIA

Brousseau, G. (1976) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Informe del XXVIII Encuentro de la C.I.E.A.E.M*, 101-117.

Gutiérrez, A., Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Miller, C. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. México: Addison Wesley

Movshovitz-Hadar,N., Zaslavsky, O., Inbar,S. (1987) An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.18, 3-14.

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education. *Journal for Reserarch in Mathematics Education* 9, 163-172.

Resnik, L. Nexher, P., Leonard, R. Magone M., Omanson S., Pelet, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: Te Case of Decimal fractions. *Journal for Reserarch in Mathematics Education* 20, 8-27.

Rico, L. (1995) Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J. Gómez P., Rico L. *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

MacGregor, M. (1996) Aspectos curriculares en las materias aritmética y álgebra. *UNO*, 9, 65-69