# EL ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO EN EL ENFOQUE LÓGICO SEMIÓTICO (ELOS). APLICACIONES A LA INVESTIGACIÓN Y AL DESARROLLO CURRICULAR EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA[1]

Martín Socas

Universidad de La Laguna

**Resumen**

*En esta ponencia se analiza la cultura matemática, entendida como un proceso de culturización matemática, y se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica: el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad. Se estructura el Análisis del Contenido Matemático desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), a partir de la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y de los estadios de desarrollo de los mismos. Y se describe la Competencia Matemática Formal (CMF) para los tres campos conceptuales: numérico (aritmético), algebraico y analítico desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.*

Palabras clave: *Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), Cultura Matemática, Contenido Matemático, Competencia Matemática Formal (CMF).*

**Abstract**

*This communication discusses mathematical culture, which is understood as a process of mathematical education where the three key aspects of concept, phenomenology and functionality. The Analysis of the Mathematical Content is structured from the perspective of Semiotic Logical Approach (ELOS) from the organization of the objects of the Mathematical one in conceptual fields and the stages of development of the same ones. Formal Mathematics Competence (CMF) is described for the three conceptual fields: numerical (arithmetic), algebraic and analytical, from the disciplinary perspective, using the algebraic conceptual field as an example.*

Keywords: *Semiotic Logical Approach (ELOS), Mathematical Culture, Mathematical Content, Formal Mathematics Competence (CMF).*

En este trabajo se describe el Análisis del Contenido Matemático desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), a partir de la organización de los objetos de la Matemática en campos conceptuales y de los estadios de desarrollo de los mismos. Se considera la cultura matemática como un proceso de culturización matemática, y se distinguen y analizan los tres aspectos esenciales que la caracterizan como disciplina científica: el campo conceptual, la fenomenología y la funcionalidad, que deben ser

[1] Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación mediante los Proyectos: "Competencia matemática, resolución de problemas y tecnología en educación matemática" (EDU2008-05254) y "Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, de Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación" (EDU2011-29324).

Socas, M. (2012). El Análisis del Contenido Matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la Investigación y al Desarrollo Curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2012* (pp. 1-22). Valencia: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València y SEIEM.

tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura en el Sistema Educativo.

La Competencia Matemática Formal (CMF) es considerada como un referente fundamental del análisis del contenido, y se describe para los tres campos conceptuales: numérico, algebraico y analítico, desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.

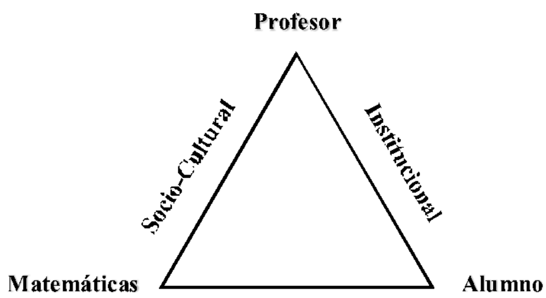
Se muestran, finalmente, diferentes usos del análisis del contenido en trabajos de investigación y de desarrollo curricular.

Se estructura este documento en los siguientes apartados: breves referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), la complejidad de los objetos y las especificidades de los procesos de Pensamiento Matemático, la Competencia Matemática Formal, el análisis del contenido matemático en la investigación, el análisis del contenido matemático en el desarrollo curricular, para concluir con unas consideraciones finales sobre la planificación y gestión de la investigación en ELOS.

## Breves Referencias al Enfoque Lógico Semiótico (ELOS)

El Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) (Socas 2001 y 2007) es una propuesta teórico-práctica (formal-experimental) que pretende aportar instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo desde una perspectiva centrada en la Semiótica, en la Lógica y en los Modelos de Competencias (Semiosis).

Se sitúa en el Sistema Educativo y describe en los términos anteriores, el Microsistema Educativo, como el ámbito en el que tiene lugar las enseñanzas regladas del conocimiento matemático, y que está formado por tres referentes o elementos básicos: Disciplina (Matemática), Alumnos y Profesores, y por tres componentes: la Social, la Cultural y la Institución Escolar, que determinan el contexto. Es decir, toma como referentes los tres elementos del llamado triángulo didáctico: conocimiento matemático, alumnos y profesores y establece, mediante un modelo de competencia o semiosis, las diferentes relaciones entre estos tres elementos, que tienen lugar en un contexto determinado por las tres componentes: Social, Cultural e Institucional, que en ELOS se expresa mediante la siguiente figura:




**Semiosis Microsistema Educativo**

Tres son las relaciones esenciales de toda semiosis o modelo de competencia. En el caso del Microsistema Educativo se describen como:

**Relación 1**: Entre el conocimiento matemático y el alumno, que se denomina: "Aprendizaje de la matemática escolar como cambio conceptual".

**Relación 2**: Entre el conocimiento matemático y el profesor, que se denomina: "Adaptación del contenido matemático curricular en materia para enseñar".

**Relación 3**: Entre el conocimiento matemático y el profesor a través del alumno, que denomina: "Interacciones".

De esta forma, los tres elementos y las tres relaciones esenciales contextualizadas en las componentes del contexto determinan, para ELOS, la naturaleza y los fenómenos que se dan en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas en los sistemas reglados. Es en este marco en el que se estudia y se desarrollan instrumentos para el análisis, la descripción y la gestión de las situaciones problemáticas o fenómenos de naturaleza didáctica matemática, que ocurren en el Microsistema Educativo. Entre estas situaciones problemáticas tenemos el estudio de la relación 1, en la que destaca como prioritario el análisis de las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático.

En este sentido en ELOS se toma como referencia uno de los grandes problemas de la Educación Matemática, que Freudhental (1981), a partir de plantearse las dificultades de Juanito para aprender la Aritmética, describe así:

*Diagnóstico y remedio son términos de la medicina adoptados por los educadores que pretenden emular a los doctores en medicina. Lo que emulan es la medicina del pasado, la de los cuáqueros de la actualidad. La diagnosis médica estaba orientada a identificar lo que estaba dañado, como lo hacen los llamados exámenes de diagnóstico en educación. La verdadera diagnosis indica por qué algo se dañó. La única forma de determinar esto consiste en la observación de los errores de un niño tratando de entenderlos.*

Los estudios sobre dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas (Rico, 1995; Socas, 1997), ponen de manifiesto, que los errores que cometen los alumnos no se deben al azar, y que tienen procedencias diversas. No obstante, los resultados de las investigaciones muestran dos carencias básicas: no ofrecen una perspectiva de generalidad y no determinan el origen de los errores ni a nivel general ni a nivel individual.

En Socas (1997) se establecen cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y éstas están relacionadas con*: la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos,* y *las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.*

ELOS para el estudio del problema didáctico sobre las dificultades y errores de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas escolares, toma en consideración y organiza los cinco ámbitos anteriores en los que emergen las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las Matemáticas. En este sentido, la organización de los dos primeros: *la complejidad de los objetos de las Matemáticas y las especificidades de los procesos de pensamiento matemático*, es lo que caracteriza el **Análisis del Contenido Matemático**.

**La Complejidad de los Objetos y las Especificidades de los Procesos de Pensamiento en Matemáticas**

La comunicación de los objetos matemáticos, principalmente de forma escrita, se realiza a través de los signos matemáticos con la ayuda del lenguaje habitual que favorece la interpretación de estos signos (Socas, 1997).

Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Entre ellos sobresalen dos, los conflictos que surgen de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos y los signos propios de las Matemáticas que difieren de la lengua común, y que son fuente de confusión en muchos alumnos; por ejemplo, su sintaxis -reglas formales de las operaciones- puede algunas veces entenderse y desarrollarse más allá del dominio original de sus aplicaciones. Es decir, el lenguaje de las Matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico -los signos son dados con un significado claro y preciso-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-. Es decir, los objetos de las Matemáticas (números, lenguaje algebraico, funciones, etc.) se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, en el que los objetos son vistos como un procedimiento; y el estatus conceptual, de carácter estático, en el que los objetos son vistos como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen, obviamente, los dos aspectos integrantes de los objetos de la Matemática que le confieren un enorme grado de complejidad.

Esta dualidad conceptual-procedimental pertenece a lo que denominamos la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos, y debe ser entendida en el marco del desarrollo de los mismos en diferentes etapas, que en el caso de ELOS se caracterizan como estadios de desarrollo y se denominan: semiótico, estructural y autónomo.

En el estadio Semiótico el objeto y los signos matemáticos nuevos emergen y son caracterizados por objetos y signos antiguos ya conocidos. En el estadio Estructural, el objeto y los signos nuevos se estructuran según la organización de los objetos y signos matemáticos antiguos, es decir, los objetos y signos matemáticos antiguos organizan la estructura y los signos del objeto nuevo. En el estadio Autónomo, el objeto y los signos actúan con significados propios, independientemente del sistema de objetos y signos anteriores, es el estadio autónomo del sistema nuevo.

Este es el proceso de generalización de las Matemáticas y es una característica de la misma, como parte inherente del desarrollo de los objetos matemáticos y sus signos. Es, por tanto, el sistema nuevo (objetos y signos) una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema antiguo.

Son estos aspectos los que ponen de manifiesto la complejidad de los objetos matemáticos y la naturaleza abstracta de la Matemática que generan procesos de pensamiento matemático en los que se dan rupturas y que son especificidades propias de estos procesos.

En general, los modos de pensamiento provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo. Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, desde los primeros años en los que comenzamos la enseñanza de las Matemáticas, así de esta manera los procesos aditivos crean dificultades a los procesos multiplicativo y lineal y éste, a su vez, crea dificultades a otros procesos.

Por ejemplo, en relación con los procesos aditivos, en el estadio semiótico, escuela primaria, la multiplicación se genera como una adición que se repite

$$a +\ldots^{(n)}\ldots + a = na \qquad \text{(estadio semiótico)}$$

Sin embargo esta adición no puede dar sentido a la multiplicación con otros números (enteros negativos o racionales).

Como hemos señalado la organización de los objetos y las especificidades del pensamiento Matemático que caracterizan el Análisis del contenido Matemático se organiza en ELOS mediante los dos referentes siguientes: La Competencia Matemática Formal (CMF) y Los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM), que pasamos a describir, especialmente el primero.

**La Competencia Matemática Formal (CMF)**

A efectos de establecer el modelo de Competencia Matemática Formal para los campos numérico, algebraico y analítico, analizaremos, brevemente, la naturaleza de los objetos de la Matemática y su relación con los sistemas de signos de la Matemática.

En relación con la naturaleza de los objetos de la Matemática tomamos en consideración diferentes aspectos que los caracterizan, de manera que, estos aspectos esenciales de los objetos en la Disciplina Matemática, los expresaremos de forma más concreta y relacionada, en un modelo que denominaremos Competencia Matemática Formal (CMF). En este proceso de caracterización de los objetos matemáticos, nos referimos a la naturaleza de los mismos, diferenciando al objeto y a las formas de representarlos. Por ello, expresaremos, en primer lugar, diferentes cuestiones relevantes sobre la naturaleza del conocimiento matemático, para analizar después el papel que atribuimos a los objetos matemáticos y a los sistemas de signos matemáticos.

Las características más sobresalientes de las Matemáticas pueden ser abordadas, en la actualidad, desde dos grandes posiciones que han caracterizado la naturaleza del conocimiento matemático durante las distintas épocas: la prescriptiva (o normativa) y la descriptiva (o naturalista), la primera procede de una posición absolutista de la Matemática y la segunda de una posición relativista, que analiza el conocimiento matemático desde la práctica matemática y sus aspectos sociales. Del análisis de los aspectos de racionalidad que subyacen en la actividad matemática en las dos grandes perspectivas adoptadas, se pueden distinguir, en la primera, que concibe la racionalidad matemática como una propiedad de los sistemas formales, y en la segunda, que la entiende como una propiedad de la empresa humana, que abre el horizonte de una racionalidad fuera de los ámbitos de la lógica formal y sustentada en la actividad de los matemáticos, en la historia y en el contexto socio-cultural. De ellas, no obstante, se pueden extraer tres aspectos esenciales que caracterizan la Matemática y que deben ser tenidos en cuenta en la enseñanza/aprendizaje de la misma:

- La Matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado (campos conceptuales) y socialmente compartido. Esta organización lógica de los conceptos, propiedades, teoremas..., explica un gran número de dificultades y obstáculos en el aprendizaje.
- La Matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartida. Problemas que pueden tener relación con el mundo natural o social o ser problemas internos de la propia disciplina. La respuesta a estos dos tipos de problemas

explican la evolución y desarrollo progresivo de los objetos matemáticos (conceptos, teorías...). La actividad de resolución de problemas es un proceso cognitivo complejo que ocasiona dificultades en el aprendizaje de la Matemática.

- La Matemática es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje.

Debemos tener en cuenta que los objetos del conocimiento (saber) matemático como parte del conocimiento (saber) humano han sido considerados, como un conocimiento subjetivo, y como un conocimiento objetivo. Hemos de señalar que el sentido subjetivo ha predominado en la Didáctica de la Matemática. Es común que se consideren, en general, los objetos mentales y los objetos de la Matemática sin hacer distinción aparente entre ellos, y en situaciones particulares se pase a distinguirlos sin encontrar criterios claros para esa diferenciación. Es decir, practicamos una dualidad confusa: objetivo/subjetivo, en relación con los objetos de la Matemática en la Cultura Matemática y en el Sistema Educativo.

Análogamente, al pensar en los objetos de la Matemática, podemos situarnos en dos polos opuestos: considerar el lenguaje en un nivel secundario en relación con los objetos o pensar que la objetividad de la Matemática está inseparablemente unida a su formulación lingüística: “la Matemática no es más que un juego del lenguaje formal”. Entre estas dos posiciones, sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente, parece razonable aceptar que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974), no puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestras construcciones.

La Matemática es comprensible si se considera encuadrada en el contexto de una cultura. En este sentido, la Matemática tiene objetos y sus enunciados tienen significados que deben buscarse en la comprensión compartida de los seres humanos de una determinada cultura. También, la enseñanza de la Matemática forma parte del sistema educativo obligatorio de cualquier país, y es el encargado de transmitir la herencia cultural básica de cada sociedad. Al ser la Matemática una disciplina del currículo, éste no puede ser ajeno o contrapuesto a los valores de esa cultura y sociedad.

Podemos, entonces, diferenciar dos procesos en relación con la Matemática, el de “Culturización Matemática”, entendido como el de construcción o descubrimiento de los objetos matemáticos que dan origen al saber matemático sabio o disciplinar; y el de “Matematización de la Cultura”, entendido como el de enseñanza-aprendizaje que se debe generar al situar la Matemática como un conocimiento cultural para todos los ciudadanos, al menos hasta los dieciséis años, y que se caracteriza por el saber matemático que debemos enseñar. En el primer caso nos referimos a una conciencia colectiva y en el segundo caso a una conciencia individual.

Estas reflexiones nos llevan a diferenciar los objetos matemáticos en uno u otro proceso. De tal manera que la “Culturización Matemática” es considerada como la génesis de un proceso selectivo en el que ciertamente individuos privilegiados generan este proceso, y en el que los objetos terminan por pertenecer a una conciencia colectiva (sentido histórico), mientras que los objetos matemáticos de la “Matematización de la Cultura” (saber a enseñar), están en un proceso que no es selectivo, sino que es para todos y cada uno de los individuos (sentido didáctico).

En relación con los objetos matemáticos y los sistema de signos matemáticos partimos de que la cultura matemática, es considerada como un proceso de culturización matemática, en el que se distinguen tres aspectos esenciales de la misma, que deben ser tenidos en cuenta en el proceso de matematización de la cultura, es decir, en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la misma en los sistemas escolares.

Estas perspectivas de la Matemática nos obligan, desde el punto de vista del aprendizaje, a considerar de manera general, la naturaleza de los entes matemáticos, diferenciando el "objeto" y las formas de "representarlos". Por ello, describimos el papel que atribuimos a los "objetos matemáticos" y a los "sistemas de signos matemáticos".

La Didáctica de la Matemática plantea la problemática de encontrar relaciones entre los objetos del conocimiento matemático y las representaciones de ese objeto por el alumno. Esto lleva a determinar a grandes rasgos dos posiciones en relación con los objetos matemáticos.

La objetivista que supone aceptar que los signos matemáticos (ostensibles y observables) dotan a los objetos de una corporeidad que les diferencia de la conciencia mental de esos objetos. Estos supuestos metodológicos suponen aceptar diferencias en la dualidad externo e interno, es decir, postular la existencia de dos mundos, el real, formado por los objetos exteriores al sujeto y el mental, caracterizado por las representaciones internas del sujeto. Éste sería a grandes rasgos el posicionamiento objetivista, que se caracterizaría por un posicionamiento representacionalista; existe un mundo exterior independiente de la conciencia individual, nuestro sistema cognoscitivo interacciona y se desarrolla, aunque sea parcialmente, a partir de ese mundo exterior y el conocimiento de ese mundo exterior pasa por su representación en un sistema de signos y nuestra actuación sobre la base de dichas representaciones.

La subjetivista que englobaría todas las posiciones que ponen en duda el objetivismo representacionalista, supondría a grandes rasgos, negar la existencia de objetos fuera de la conciencia individual, es decir, fuera de toda experiencia individual posible.

Hemos de indicar que tanto la postura objetivista como la subjetivista se interesan por describir los procesos que se dan entre la interacción entre los objetos del conocimiento matemático y los instrumentos cognoscitivos que permiten en el individuo tal incorporación.

En el discurso matemático, por ejemplo, el número 5, el número $\prod$=3,14159…, los números combinatorios, los números amigos, el cuadrado, las funciones trigonométricas, la función Beta, o la distribución de Dirac, designan objetos matemáticos. Cuando los objetos matemáticos se encadenan mediante ciertas relaciones o leyes tenemos las estructuras matemáticas que también pueden ser consideras como objetos. El término objeto matemático connota que el objeto en cuestión tiene alguna clase de existencia. Ahora bien, la noción de existencia no está claramente delimitada y comporta diferentes dificultades lógicas y psicológicas (Davis y Hersh, 1988).

Desde los fundamentos de la Matemática, para la concepción platonista, los objetos matemáticos son reales, y su existencia, un hecho objetivo independiente por completo del conocimiento que de ellos tengamos. Por el contrario, para la concepción formalista no hay objetos matemáticos. La Matemática son fórmulas, listas de símbolos que no se refieren a nada, es decir, axiomas, definiciones y teoremas.

La naturaleza de los objetos matemáticos y su representación constituye, sin lugar a dudas, un dominio sumamente complejo. Podemos encontrar, objetos en realidades diferentes, o un mismo objeto, en diferentes estadios de desarrollo, o en diferentes mundos de pensamiento, o en experiencias de naturaleza distinta (Socas, 2010).

Señalamos, en este sentido, que a efectos de organizar la complejidad de los objetos matemáticos podemos distinguir tres escenarios:

Escenario 1: El de la materialidad o corporeidad matemática. Es el escenario de lo observable, lo perceptible, lo susceptible de ser notado. Es también el escenario de lo ostensible, lo susceptible de ser mostrado.

Los objetos matemáticos toman forma y son representados en el dominio del mundo físico, es decir, lo visible del objeto. Su encarnación en un objeto físico (baldosa cuadrada), en una figura: $\square$, o en una fórmula: $x = y^2$ , x, $y \in A$ (cuadrado de un anillo, x es el cuadrado de y).

Es el escenario que llamaremos de las representaciones semióticas de los objetos matemáticos, significando la doble intención de observable (percibido) y ostensible (mostrado).

Escenario 2: Culturización matemática. Es el escenario del conocimiento objetivo de los objetos matemáticos, productos de las interacciones humanas, enmarcadas en la realidad socio cultural, que encuentra lenguajes que posibilitan una potencialidad expresiva cada vez mayor y que facilita una dinámica abstractiva y generalizadora.

Escenario 3: Matematización de la cultura. Es el escenario del conocimiento subjetivo de los objetos matemáticos y, por tanto, de las representaciones mentales de naturaleza individual.

Estos tres escenarios no sólo están íntimamente relacionados, sino que deben ser considerados como un todo holístico en el que sus partes admiten una separación analítica.

También es común hablar del lenguaje matemático, como un sistema de signos matemáticos (SSM) en el que se distinguen dos subconjuntos de signos: “signos artificiales” (propios de la Matemática), y “signos naturales” o de la lengua usual. El lenguaje vernáculo es el instrumento práctico que permite indicar cómo han de utilizarse los signos del lenguaje artificial (De Lorenzo, 1971).

Otros autores como Kieran y Filloy (1989) sugieren sustituir la noción de Sistema de Signos matemáticos por la de Sistema Matemático de Signos (SMS), con su código correspondiente. Esta noción de Sistema Matemático de Signos es lo suficientemente amplia que permite analizar no sólo los textos matemáticos históricos sino también las producciones de los alumnos en clase de Matemáticas. Este punto de vista supone situarse en una semiótica de las Matemáticas centrada en los sistemas de significación y en los procesos de producción de sentido antes que en el estudio de los signos.

De las anteriores consideraciones emerge como esencial la noción de representación semiótica de un objeto matemático. Tomamos, en primer lugar, la posición de Duval (1993), quien caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: “un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable...
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro en la que ha sido formada...

3) La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial...”

Describimos, finalmente, la posición adoptada desde el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) en los tres aspectos: la cultura matemática, la naturaleza de los objetos matemáticos y el papel del lenguaje matemático en la Matemática.

La cultura Matemática es considerada como una disciplina multiforme, que emerge y se desarrolla como una Actividad Humana de Resolución de Problemas. Los Problemas tienen una característica común “la búsqueda de regularidades o patrones” y el problema Matemático por excelencia es “la modelización”. La Cultura Matemática crea un Sistema de Signos propios para expresar los comportamientos regulares o patrones y este conjunto de regularidades o patrones se organiza en “campos conceptuales”. Los elementos de estos campos conceptuales son los “objetos matemáticos”. Estos objetos se “encarnan”, es decir, se hacen observables y ostensibles mediante el sistema de signos.

Las relaciones entre los objetos del campo conceptual, los signos que los representan y sus significados en la disciplina Matemática se expresan mediante la siguiente SEMIOSIS o Modelo de Competencia que describe la FENOMENOLOGÍA asociada a los objetos matemáticos en relación con los signos y los significados.


La noción de *representación semiótica* queda determinada por los referentes: signo, objeto y significado, y caracterizada como un Signo que:

(1) Tiene ciertos caracteres que le son propios (contexto)

(2) Establece una relación diádica con el significado

(3) Establece una relación triádica con el significado a través del objeto; esta relación triádica es tal que determina al signo a una relación diádica con el objeto y al objeto a una relación diádica con el significado (Hernández, Noda, Palarea y Socas, 2004, p. 171)

Establecida la naturaleza de los objetos matemáticos y su relación con los sistemas de signos, trataremos de establecer lo que es la Competencia Matemática Formal (CMF), una de las dos componentes del Análisis del Contenido Matemático, y lo haremos para los tres campos conceptuales: Números, Álgebra y Análisis, aunque tomaremos en consideración para el estudio, el Álgebra.

La Competencia Matemática Formal (CMF), toma los objetos de la Matemática considerada como una Disciplina Científica, y muestra la organización formal de estos objetos en su campo conceptual en relación con los conceptos, fenómenos y funciones implicadas. Tiene como punto de partida la organización de los objetos matemáticos en su complejidad y para ello toma las dimensiones conceptual, funcional y fenomenológica de los mismos y éstos se organizan desde la perspectiva lógico semiótica que hemos considerado (Socas, 2001 y 2007).

En el análisis, tomaremos en consideración el campo conceptual algebraico y nos situaremos en el nivel temático de ESO. En consecuencia, es necesario explicitar y relacionar los objetos del campo conceptual algebraico, la funcionalidad del lenguaje algebraico y la fenomenología del conocimiento algebraico.

La caracterización del campo conceptual del Álgebra supone por una parte organizar la complejidad de los objetos del Álgebra y por otra, tomar en consideración los diferentes procesos en los que está presente el conocimiento algebraico. Los objetos matemáticos del Álgebra, como todos los objetos matemáticos, tienen un carácter dual: semántico y sintáctico, que estarán presentes tanto en los fenómenos que organizan como en las funciones que desarrollan. Necesitamos, en consecuencia, caracterizar esta dualidad operacional/conceptual en el Álgebra, es decir, relacionar los signos con los objetos algebraicos y sus significados. Esta dualidad del objeto matemático ha sido utilizada e interpretada por distintos autores Hiebert y Lefevre (1986), Douady (1986), Sfard (1991), Socas (2001),…

En los trabajos de Hiebert y Lefevre (1986), esta dualidad se desarrolla bajo las nociones de conocimiento conceptual y procedimental. El *conocimiento conceptual*, se caracteriza como un conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como conectado conformando una red de conocimiento. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. El *conocimiento procedimental*, se construye en dos partes: una se compone del lenguaje formal, o sistema de representación simbólico de las Matemáticas. La otra, consiste en algoritmos o reglas para completar tareas matemáticas. En resumen, el conocimiento matemático procedimental engloba dos clases de información. Una que consiste en la familiaridad con los símbolos aislados del sistema y con las convenciones sintácticas para la configuración aceptable de símbolos y otra, en reglas o procedimientos para resolver problemas matemáticos.

Estos autores ponen de manifiesto las características diferentes de cada uno de ellos. El conocimiento conceptual indica que es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan, b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

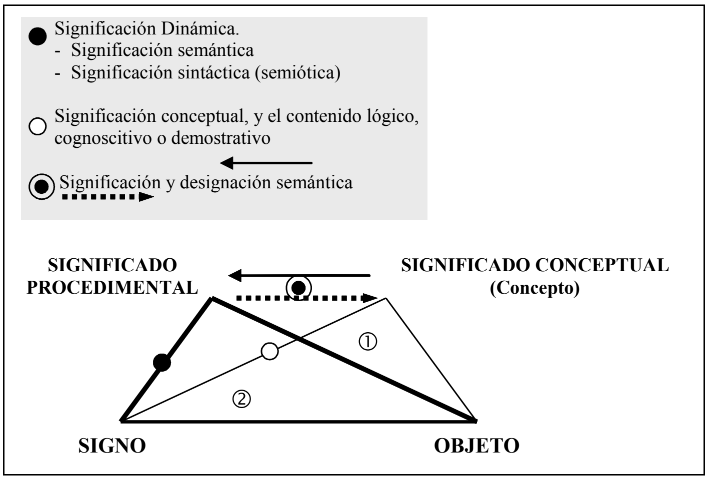
Es ciertamente una forma sencilla de explicitar a nivel conceptual la dualidad operacional/conceptual, es decir, la convivencia de los tipos de conocimiento, conceptual y procedimental, en Matemática.

Socas (2001), analiza la dualidad operacional/conceptual en el marco del enfoque Lógico Semiótico (ELOS), en términos de la función semiótica que deriva del plano denotativo y connotativo de la tríada: signo-objeto-significado. Esquemáticamente se representa así:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *SIGNO* | | | OBJETO | SIGNIFICADO (conceptual) | PLANO DENOTATIVO |
| SIGNO | OBJETO | SIGNIFICADO (procedimental) | | | PLANO CONNOTATIVO |

El punto de partida es la posición de Peirce (1987), en la que el signo se presenta como una relación triádica entre un Representamen, su Objeto y el Interpretante. Cada signo está relacionado con tres instancias separables analíticamente: Representamen (es un signo en cierto aspecto o carácter que le conecta con el objeto), Objeto (es signo para algún objeto al que equivale ese pensamiento) e Interpretante (es un signo para algún pensamiento que lo interpreta).

La tríada de Peirce se expresa en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS) mediante la tríada: signo-objeto-significado. Explicitar las relaciones que se dan en esta triada en los dos planos de la función semiótica, es el objetivo esencial para determinar conceptualmente el papel de los objetos y los signos en el lenguaje algebraico y una forma de expresar la dualidad operacional/conceptual. En ELOS esta dualidad se determina separando el significado en dos: significado conceptual y procedimental, y modelizando tales relaciones mediante el trapecio formado por los dos triángulos, signo-objeto-significado (conceptual) y signo-objeto-significado (procedimental) (Socas, 2001 y 2010), de la siguiente manera:




En este esquema se modelizan las diferentes relaciones que caracterizan la dualidad operacional/conceptual, en las que podemos identificar las descritas en relación al conocimiento conceptual y procedimental desarrollado en Hiebert y Lefevre (1986).

Nos ocupamos ahora de las diferentes funciones del lenguaje algebraico (matemático), y podemos decir que éstas se concretan en las cuatro funciones básicas de los lenguajes: “expresiva” (estado del objeto algebraico que facilita la representación semiótica y que permite la materialización o encarnación del objeto), “señalizadora” (que evoca, desencadena, estimula..., una reacción en el receptor), “descriptiva” y “argumentadora”.

Las dos funciones “expresiva” y “señalizadora” son consideradas como funciones inferiores de todo lenguaje, no así en el lenguaje matemático (algebraico). A la función expresiva se le asocia una “percepción primaria” y a la función señalizadora se le atribuye el poder de desencadenar una “actividad perceptual”. Deben entenderse como procesos complementarios.

Pero el lenguaje algebraico (matemático), al igual que el lenguaje humano, es mucho más rico; posee dos funciones superiores que son de vital importancia para la evolución del razonamiento matemático y para la racionalidad de los objetos matemáticos, éstas son las funciones “descriptiva” y “argumentadora”.

La organización anterior del lenguaje matemático nos ofrece una perspectiva útil para hacer una distribución de los objetos algebraicos. Si consideramos “las situaciones problemáticas” o “fenómenos” de naturaleza didáctico matemático, podemos caracterizar a los fenómenos que tienen lugar con los objetos algebraicos en la actividad matemática mediante tres entidades primarias o básicas que tomaremos como referencia: “Expresiones semióticas”, “Descripciones algebraicas” y “Argumentaciones algebraicas”.

Las “expresiones semióticas”, se refieren a los observables y ostensibles utilizados en la actividad matemática, tales como, términos, símbolos, tablas, gráficos, palabras..., en general, todas las representaciones externas del objeto algebraico. Las expresiones semióticas asumen las funciones expresivas y señalizadoras del lenguaje algebraico.

Las “descripciones algebraicas”, se refieren, a las definiciones, propiedades, características de los objetos algebraicos, y a las relaciones de los objetos entre sí, es decir, conceptos, proposiciones, procesos, algoritmos, operaciones...

Las “argumentaciones algebraicas” son tanto las demostraciones para probar propiedades del Álgebra como las pruebas que empleamos para mostrar a otra persona la solución de la situación problemática o fenómeno algebraico.

Ahora bien desde el punto de vista de la Teoría Semiótica tenemos que suponer que una “expresión de signos matemáticos” no designa un objeto matemático del mundo real sino que transmite un contenido de la cultura matemática. En nuestro caso, aunque el significado del objeto algebraico corresponda con un objeto del mundo cultural (culturización matemática), el contenido algebraico se identifica con el referente, es decir, lo identificamos como objeto cultural y no como unidad cultural. Esta es la posición del Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2001 y 2007).

Finalmente, la fenomenología del conocimiento algebraico, en el nivel temático, este se manifiesta como el desarrollo de habilidades para manipular letras y otros símbolos que pueden significar cosas diferentes, y también como construcción de operaciones, expresiones o entidades abstractas a través de relaciones bien definidas.

Actualmente encontramos un cierto acuerdo cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria: “ocuparse del estudio de las "letras" o "variables" y de las propiedades que las relacionan”. Sin embargo, existen diferentes interpretaciones a la afirmación anterior (Socas et al. 1989): álgebra como aritmética generalizada (las letras forman parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas), álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos (las ecuaciones), álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, y álgebra como modelo estructural.

Posteriormente encontramos una propuesta de organización de los contenidos del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria, éstos deben organizarse en torno a la generalización, la resolución de problemas, la modelización y las funciones (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

La propuesta de organización y fenomenología asociada a los objetos algebraicos, está relacionada con la generalización y la resolución de problemas, en la que destacan:

(1) Capacidades algebraicas que se deben desarrollar: usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones, trabajar y hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas, sustituir formalmente, generalizar y particularizar, hacer transformaciones en expresiones algebraicas, leer, interpretar y hacer transformaciones en funciones y fórmulas dadas, plantear y resolver ecuaciones por métodos algebraicos y otros.

(2) Usar las letras con significados algebraicos en entornos numéricos y de magnitudes (álgebra de las cantidades) y en entornos geométricos (álgebra geométrica).

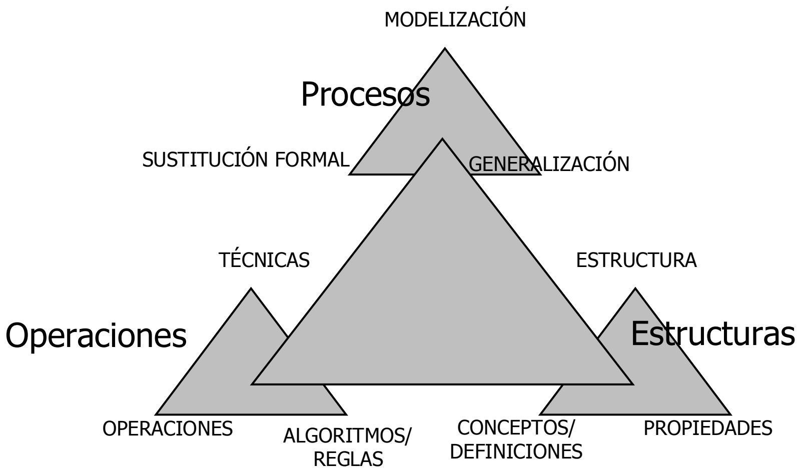
(3) Usar diferentes sistemas de representación semióticos y fuentes de significado: contextual, numérico, visual/geométrico, esquema y formal.

El análisis de los diferentes aspectos del Álgebra: conceptual, funcional y fenomenológico, nos permite describir la Competencia Matemática Formal (CMF) y como ésta se puede expresar como un modelo de competencia organizado en relación a las tres características de la Matemática como disciplina: campo conceptual, resolución de problemas y lenguaje propio, descrito anteriormente como los elementos que caracterizan a la disciplina matemática.

La organización del campo conceptual, en relación con la dualidad de los objetos operacional/conceptual, deriva del análisis anterior en el que se explicitan las diferentes relaciones que se dan en la triada: signo-objeto-significado. De esta manera, se caracterizan: las operaciones, por la semiosis que describe el significado procedimental, las estructuras, por la semiosis que describe el significado conceptual, y los procesos, por las relaciones que tienen lugar entre el significado procedimental y conceptual.

Se caracteriza así, la Competencia Matemática Formal (CMF) para los campos: numérico, algebraico y analítico, mediante la siguiente semiosis que tiene como referentes las tres componentes del campo conceptual: operaciones, estructuras y procesos, y como contexto: las situaciones problemáticas, el lenguaje (expresivo y descriptivo) y los argumentos.

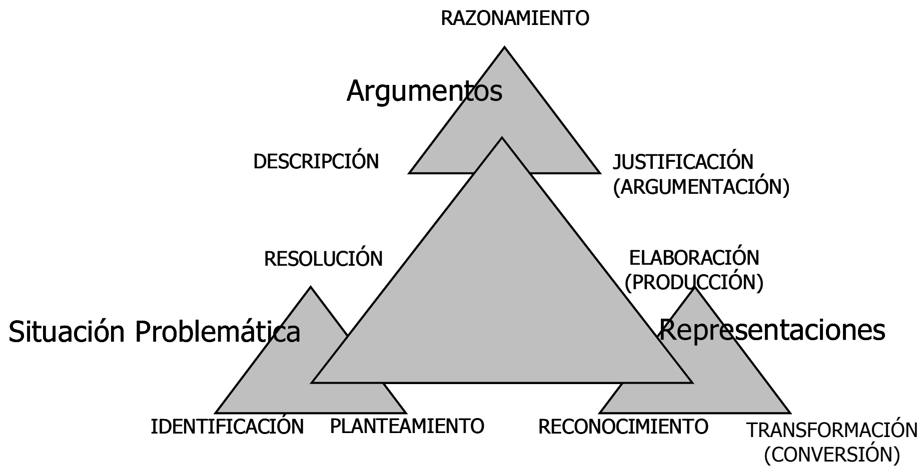
El campo conceptual de forma esquemática quedaría así:



Se expresan los diferentes dominios de la actividad matemática, en relación con el campo conceptual desde la perspectiva formal y sus diferentes relaciones, es decir, se describe la dualidad de los objetos matemáticos en relación con el conocimiento matemático conceptual/procedimental del campo tratado. De manera concreta, si nos situamos en una actividad relacionada con el Álgebra de la ESO, ésta puede ser descrita en relación a las tres componentes: operaciones, estructuras y procesos, y sus relaciones. Cada componente a su vez, está determinada por otras tres componentes que describen una nueva semiosis. La componente Operaciones queda determinada por la semiosis: operaciones, algoritmos (reglas) y técnicas; la componente Estructuras por: conceptos (definiciones), propiedades y estructura; y la componente Procesos por: sustituciones formales, generalización y modelización.

Esta organización de los campos conceptuales numérico, algebraico y analítico está contextualizada en las Situaciones problemáticas que se abordan en el campo conceptual, en el Lenguaje (Representaciones) y Argumentos (Razonamientos) que se utilizan en el desarrollo de la situación problemática.

La contextualización del campo conceptual se expresa de forma esquemática así:




Análogamente, las tres componentes del contexto, quedan determinadas por las respectivas semiosis. En el caso de Situaciones problemáticas: identificación, planteamiento y resolución; en Representaciones (lenguaje): reconocimiento, transformación (conversión) y elaboración (producción); y en Argumentos: descripción, justificación y razonamientos.

**El Análisis del Contenido Matemático en Investigaciones en Didáctica de la Matemática**

En las investigaciones en Didáctica de la Matemática utilizamos distintos instrumentos, por ejemplo los cuestionarios, para responder a diferentes preguntas de investigación:

¿Qué tipos de significados y de pensamiento matemático utilizan los alumnos, cuando se enfrentan a situaciones problemáticas numéricas y algebraicas en forma de resolución de ejercicios de cálculo, en argumentaciones sobre la veracidad o falsedad de sentencias, y, en la resolución de situaciones problemáticas en las que intervienen procesos de sustitución formal, generalización o modelización?

Tomamos en consideración el trabajo de Socas, Hernández, Palarea, y Afonso ( 2009), en los que se utilizan un cuestionario con preguntas en diferentes formatos:

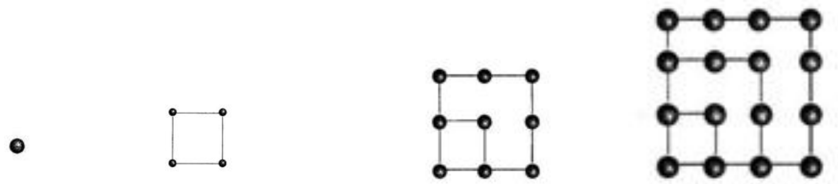
1) Formato de sentencias para decidir la veracidad o no de las mismas, por ejemplo: Indicar si las igualdades siguientes son verdaderas o falsas, explicando la respuesta:

1. $\sqrt{2} = 200/14$
2. $1.3 = \overline{1}2/9$
3. $5/3 = 60/36$
4. $1.3 + \overline{8}.3 = \overline{9}.6$
5. $\sqrt{3} = 300/173$
6. $\sqrt{6} + \sqrt{15} = \sqrt{3}\,(\sqrt{2} + \sqrt{5})$
7. $-1/2 + 1/3 = -(1/2 - 1/3)$
8. $2.3 + \overline{5}.2 = \overline{7}.5$
9. $3x + 4 + 5x = 12x$
10. $40 + 12\,x = 4\,(3x + 10)$

2) Formato de sentencias incompletas para obtener el segundo miembro de la misma, por ejemplo: Realizar los siguientes cálculos:

1. $2^2 + 3 \cdot 2^2 =$
2. $3 + \sqrt{2} =$
3. $3 + 3\sqrt{2} =$
4. $0.3 + 1/2 + 2 =$
5. $\sqrt{5} - 2 =$
6. $3x + 3 =$
7. $5x + 2 =$
8. $4x - 2 + x =$
9. $3x + 2y - 3 + y =$
10. $x + (2x + y) - 2 =$

3) Cuestiones formuladas en formato de problemas, por ejemplo: Los números 1, 4, 9, 16,… reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados. Se pueden descomponer como sigue: 1=1; 4= 1 + 3; 9= 1 + 3 + 5; 16 = 1 + 3 + 5 + 7



1 4 9 16

V.1. Calcula el número cuadrado siguiente al 16.

V.2. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6.

V.3. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 20.

V.4. Calcula el número cuadrado que ocupa la posición n.

En estas tareas del cuestionario es necesario, además de confirmar la validez del cuestionario como instrumento de medida, realizar el análisis del contenido matemático implícito en cada una de ellas, a efectos de poder estudiar los diferentes significados que los estudiantes muestran en su resolución.

Veamos cómo se procede, en este caso, desde el Análisis del Contenido que hemos establecido y que nos permite determinar los dominios de la actividad matemática en relación con la Competencia Matemática Formal (CMF), es decir, explicitar los objetos del campo conceptual en términos de las operaciones, estructuras y procesos implicados, así como, el contexto en el que se desarrolla la tarea; y en relación con los Estadios de Desarrollo del Objeto Matemático (EDOM) establecer los estadios de desarrollo: semiótico, estructural o autónomo, en los que se consideran los objetos tratados.

Se puede realizar el análisis del contenido para cada una de las tareas mediante un diagrama de doble entrada:

| Estadios de Desarrollo / Dominios de actividad matemática desde la competencia formal | Ámbitos | Semiótico | Estructural | Autónomo |
|---|---|---|---|---|
| Sistemas de Representación (SR) | - Reconoce<br>- Transforma (Conversión)<br>- Elabora (Produce) | | | |
| Situación Problema | - Identifica<br>- Plantea<br>- Resuelve | | | |
| Razonamientos | - Describe<br>- Justifica (argumenta)<br>- Razona | | | |
| Operaciones | - Operaciones<br>- Algoritmos (Reglas)<br>- Técnicas | | | |
| Estructuras | - Conceptos (Definiciones)<br>- Propiedades<br>- Estructuras | | | |
| Procesos | - Sustitución Formal<br>- Generalización<br>- Modelización | | | |

Conviene indicar en relación con los Procesos: Sustitución Formal, Generalización y Modelización, que éstos responden a las competencias matemáticas generales de reconocimiento del proceso, formulación del proceso y manipulación (validación) del mismo. Por, ejemplo, en el caso del proceso de generalización éste se organiza en relación con los cuatro pasos o momentos que le caracterizan matemáticamente:

- Reconocimiento de situaciones problemáticas numéricas o geométricas...
- Construcción de tablas u otro tipo de representación
- Explicitación de una expresión o fórmula (reconocimiento de la regla o patrón)

- Verificación de la fórmula con ejemplos

Los estadios de desarrollo de los objetos tratados permiten situar la actividad matemática en el nivel temático considerado, y estos estadios o formas de caracterizar los dominios de la actividad matemática en ELOS son compatibles e identificables con otras formas de caracterizar los dominios de la actividad, por ejemplo en PISA (Rico y Lupiáñez, 2008).

En el caso de la tarea 1, se proponen situaciones problemáticas que se sitúan en el conocimiento estructural, que los estudiantes deben identificar y resolver. Esta tarea consta de ocho sentencias que están en registros numéricos y dos en registros algebraicos, que los alumnos deben reconocer y realizar, si es necesario, transformaciones en ellas, y en las que se solicitan, además, justificaciones argumentadas. Los diez ítems están formulados en el ámbito estructural, y se expresa mediante una igualdad en la que las operaciones y las partes deben ser conocidas, se trata de la utilización del signo igual en "sentido lógico", que inicialmente se pueden identificar con una estructura, un concepto o una propiedad matemática.

La tarea facilita información sobre el comportamiento de los resolutores y cómo actúan frente a cuestiones que implican la identificación de una estructura o una propiedad. Es decir, el dominio de la actividad matemática, permite estudiar el papel de los diferentes registros en las representaciones utilizadas, en términos de si los reconocen, los transforman o elaboran otros apropiados, y el tipo de argumentos que utilizan para asegurar la veracidad o no de la sentencia, justificando con fundamentos operacionales basados en operaciones o reglas, o con fundamentos estructurales basados en conceptos, propiedades o estructuras.

En el caso de la tarea 2, se proponen situaciones problemáticas que se sitúan en el conocimiento operacional y que los estudiantes también deben identificar y resolver, en la que cinco de las actividades están formuladas en registros numéricos y las otras cinco están expresadas en registros algebraicos. Se trata de una tarea de diez ítems, formulados mediante sentencias incompletas en las que falta el segundo miembro de la igualdad, y en la que se pide que los alumnos realicen determinados cálculos para obtener el segundo miembro de la misma, de manera que ésta sea verdadera, es decir, sea una identidad. Las diez cuestiones que se plantean, tienen inicialmente un sentido operacional, se trata de la utilización del signo igual en "sentido semántico", que el alumno identifica como una expresión que debe completar, realizando operaciones, aplicando reglas o técnicas de cálculo adecuadas, es decir, se plantea una igualdad en la que el segundo miembro es desconocido.

Esta segunda tarea facilita información sobre el comportamiento de los resolutores y cómo actúan frente a cuestiones que implican la realización de cálculos para completar una igualdad. Permite analizar las necesidades o no de los estudiantes de dar como resultado una cantidad, aunque sea aproximada, en los apartados numéricos y de observar el tipo de objeto matemático asociado a las expresiones numéricas o algebraicas.

En el caso de la tarea 3, se propone una situación problemática que se sitúa en el conocimiento procesual, en la que de nuevo se pide la identificación y resolución del problema, pero ahora se trata de un proceso de generalización, en el que se da, de forma explícita, una descripción organizada de un comportamiento regular, en dos representaciones diferentes, en el que la regla no viene dada de forma explícita. Se trata de establecer una igualdad, en la que alguna operación o alguna parte son desconocidas y están por determinar.

Se sitúa la tarea en el desarrollo de las competencias generales de todo proceso matemático: reconocerlo, formularlo y manipularlo, que en este caso, se concretan en los cuatro momentos que caracterizan el proceso de generalización.

La tarea se organiza, en diferentes apartados, en la que se pide determinar otros números cuadrados más o menos cercanos a los que se facilitan, en uno de los dos registros, para terminar expresando el número cuadrado en la posición "n".

En resumen, el dominio de la actividad matemática de cada una de las tareas, nos permite situarlas, como punto de partida, en uno de los ámbitos del campo conceptual estudiado: operacional, estructural y procesual, contextualizadas como situaciones problemáticas que los alumnos deben identificar y resolver, que implican diferentes escrituras y razonamientos, es decir, tareas que están diseñadas para provocar, inicialmente una posible respuesta operacional, estructural o procesual, aunque ello no garantiza que ésta sea la respuesta inicial del alumnado, sin embargo, el modelo de competencia que describe el análisis del contenido, permite observar los diferentes itinerarios que siguen los alumnos.

Finalizaremos, referenciando algunos ejemplos de investigaciones que utilizan los Modelos que derivan del Análisis de Contenido y de la Competencia Cognitiva (CC) de ELOS como marco teórico o como componentes del marco conceptual.

En el ámbito del Pensamiento Algebraico destacamos los trabajos sobre "Competencias y errores de alumnos de Secundaria en los procesos de Sustitución Formal, generalización y Modelización" (Ruano y Socas, 2001; Ruano, Socas, y Palarea, 2003; Ruano, 2012).

En el ámbito del Pensamiento Numérico destacamos los trabajos sobre "El sistema numérico D en la formación de maestros" (Moreno, Hernández y Socas, 2007; Moreno, Hernández y Socas, 2010 y Moreno, 2012).

En el ámbito del pensamiento Analítico, en Pecharromán (2008), encontramos un buen ejemplo de una investigación sobre el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas, con alumnos del 2º Ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, en el que el estudio cognitivo sobre las dificultades y errores asociadas a la complejidad de los objetos y a los procesos de pensamiento matemático implicados, se desarrolla en el marco de una "investigación de diseño", guiada por la conjetura : "los alumnos tienen serias dificultades en la interpretación de las propiedades globales de las funciones cuando éstas aparecen representadas gráficamente, tanto por su identificación sobre la gráfica de la función, como por su referencia en el diagrama cartesiano que contiene a la función, (mediante puntos del plano o intervalos de la recta)" , en la que la organización del contenido de enseñanza se realiza mediante los estadios de desarrollo de los objetos implicados. Por ejemplo, para el estudio de la concavidad y convexidad, este se organiza en un primer momento, de la siguiente manera:

- El estadio semiótico: El conocimiento nuevo sería el estudio de la concavidad y convexidad de una gráfica funcional definida en función de la posición relativa de la recta secante respecto de la gráfica (la secante que une los extremos de la gráfica en un intervalo).

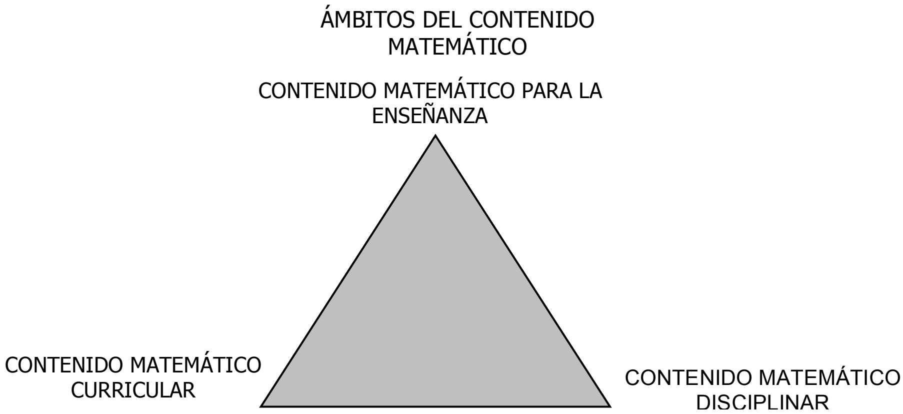
- En el estadio estructural: El crecimiento y decrecimiento funcional organiza la convexidad y la concavidad (los valores de la función crecen más deprisa o más despacio al crecer los valores de la variable).

- En el estadio autónomo: Se considera en la definición del concepto, el segmento que une los puntos de la gráfica y se considera la posición de ésta respecto de la de aquel. Si está por debajo es convexa y si está por encima es cóncava.

**El Análisis del Contenido Matemático en el Desarrollo Curricular**

La segunda de las relaciones esenciales que emergen en el Enfoque Lógico Semiótico, al describir el microsistema educativo (Socas, 2001 y 2007), es como hemos indicado: "adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar". Es en esta adaptación del contenido matemático curricular como materia para enseñar en la que juega un papel fundamental el análisis del contenido descrito anteriormente.

Esta organización del contenido matemático para enseñarlo es una competencia profesional que se requiere para abordar el problema de la planificación de la enseñanza de la Matemática. Ahora bien, el contenido matemático, es un espacio de conocimiento o entorno, que tiene diferentes ámbitos. Si tomamos como referencia la Transposición Didáctica, éstos son: "contenido matemático de la investigación", "contenido matemático disciplinar", "contenido matemático curricular deseado", "contenido matemático curricular enseñado" y "contenido matemático curricular aprendido". Desde la perspectiva del profesor de matemáticas, tres son los ámbitos específicos que necesita identificar, analizar, comprender y planificar. Podemos representarlos mediante la siguiente semiosis:




En esta semiosis tenemos como primer ámbito que el profesor necesita organizar el contenido matemático curricular (cmc), contenido matemático deseado que es definible en el dominio del contenido matemático disciplinar, aunque no es organizado bajo esa lógica. Mediante mecanismos y organizaciones precisas se extraen del contenido disciplinar y se sitúan en el currículo. Realizadas estas acciones por diferentes elementos del Sistema Educativo, el contenido matemático curricular es intrínsecamente diferente del saber disciplinar, al menos en su aspecto epistemológico, y admite interpretaciones desde diferentes perspectivas, por ejemplo funcional, como parte de una cultura básica común (Rico y Lupiáñez, 2008); el segundo ámbito es el que deriva de la propia disciplina, el saber matemático erudito, que podemos denominar contenido matemático disciplinar (cmd) o formal (Socas, 2010); y el tercer ámbito, es el contenido matemático para la enseñanza (cme), que comprende tanto el contenido matemático enseñado como el evaluado (Hernández y otros, 2010).

El análisis del contenido propuesto permite, mediante la Competencia Matemática Formal, organizar los contenidos matemáticos curriculares en un Mapa, que presenta estos contenidos organizados en el campo conceptual tratado, en un primer momento, para luego completar el Mapa con el contexto en que se desarrollan los objetos matemáticos del campo conceptual en el nivel temático considerado (Socas, 2010).

Podemos, igualmente, caracterizar el dominio de la actividad matemática desde la competencia matemática formal, en las propuestas de actividades o tareas matemáticas que se propongan a los alumnos, y relacionarlas a partir de esta organización con la competencia matemática básica, si estamos trabajando en la Educación Obligatoria.

## Consideraciones Finales

En este trabajo hemos caracterizado el Análisis del Contenido Matemático mediante dos componentes: la Competencia Matemática Formal (CMF) y los Estadios de Desarrollo de los Objetos Matemáticos (EDOM), desde la perspectiva del Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Se ha realizado a partir de la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones, identificados como objetos que se organizan en campos conceptuales, que tienen una funcionalidad y fenomenología concreta, estableciendo así, la Competencia Matemática Formal, es decir, desde el punto de vista de la Disciplina, para los campos numérico, algebraico y analítico. Y hemos mostrado su uso en la Investigación y en el Desarrollo Curricular.

Finalizamos este trabajo, dando algunas referencias de cómo se planifica y gestiona la investigación en ELOS a efecto de aportar soluciones al problema inicialmente planteado, de estudiar las dificultades, obstáculos y errores de Juanito en la Aritmética, y demás situaciones problemáticas que emergen de las tres relaciones que se dan en el microsistema educativo en relación con las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas en el sistema reglado de enseñanza. En este sentido, ELOS organiza tres modelos de competencia (semiosis): Competencia Matemática Formal (CMF), Competencia Cognitiva (CC) y Competencia de Enseñanza (CE), que conforman los referentes que describe la Semiosis General que planifica y gestiona la investigación en el microsistema educativo.

Resumidamente, el modelo de Competencia Cognitivo**,** es el segundo referente de la semiosis, y toma en consideración los aspectos anteriores (modelo de competencia matemática formal, primer referente de la semiosis), se refiere a las funciones cognitivas específicas de los objetos matemáticos tratados y a los aspectos estructurales del aprendizaje, es decir, simulará los procesos cognitivos implicados en la ejecución competente de un usuario ideal del campo conceptual considerado. Y, el modelo de Competencia de Enseñanza es el tercer referente de la semiosis, y, considera, igualmente, los aspectos anteriores (modelos matemática formal, primer referente y cognitivo, segundo referente) y describe, las acciones de los sujetos implicados, los procesos de comunicación, los mediadores, las situaciones, los contextos…, que se dan en la enseñanza).

## Referencias Bibliográficas

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (Eds.) (1996). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. Montreal: Kluwer Academic Publishers.

BOE (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria

Davis, P. J. y Hersh, R. (1988). *Experiencia matemática*. Madrid: MEC-Labor. (Título original: The Mathematical Experience. Boston: Birkhäuser, 1982).

De Lorenzo, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

Douady, R. (1986). Approaches des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire (enfants de 6 à 11 ans). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *11,* 77-110.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV IPN, México, 1997).

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,12*, 133-150.

Hernández, J., Noda, A., Palarea, M. M., y Socas, M. M. (2004). Sistemas de representación en la resolución de problemas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 6*, 159-188.

Hernández, J., Muñoz, M., Palarea, M. M., Ruano, R. y Socas, M.M. (2010). La programación por competencias en la clase de Matemáticas. Una actividad profesional básica. En M.T. González, M.M. Palarea y A. Maz, (Eds.), *Seminario de los grupos de investigación pensamiento numérico y algebraico e historia de la educación matemática* (pp. 26-49). Salamanca: SEIEM.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: the Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. y Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias. 7*(3), 229-240.

Moreno, M. D. (2012). *El sistema numérico D en la formación de maestros. Estudio de un programa de formación* (Tesis doctoral de próxima lectura). Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

Moreno, M. D., Hernández, V., y Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores sobre números decimales de alumnos con una buena formación en Matemáticas. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 8*, 251-272.

Moreno, M. D., Hernández, V., y Socas, M. M. (2010). Interpretación y análisis de los resultados obtenidos antes y después de un programa de formación sobre los números decimales. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 10*, 179-222.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Peirce, C. S. (1987). *Obra Lógico Semiótica*. Madrid: Taurus.

Popper, K. R. (1974). *Conocimiento objetivo*. Madrid: Tecnos (versión castellana de *Objective knowledge.* Oxford: Oxford University Press, 1972).

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Ruano, R. (2012). *Competencias y errores de alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución Formal, Generalización y Modelización. Implicaciones Didácticas para la transición del lenguaje numérico al algebraico* (Tesis doctoral de próxima lectura). Tesis doctoral. Universidad de La Laguna, La Laguna.

Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4.º de ESO. En M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.). *Formación del profesorado e investigación en Educación Matemática III* (pp. 239-265). La Laguna: CAMPUS.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada: SEIEM.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1)*,* 1-36.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria (Cap. V). En Rico, L. y otros (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.

Socas, M. M. (2001). *Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico.* Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Ess.), *INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. M. (2010). Competencia matemática formal. Un ejemplo: el Álgebra escolar. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática X*, pp. 9-43.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid: Síntesis.

Socas, M. M., Hernández, J., Palarea, M. M., y Afonso, M. C. (2009). La influencia del pensamiento operacional en el aprendizaje de las Matemáticas y el desarrollo de las competencias matemáticas *Indivisa. Boletín de Estudios e Investigación*, *Monografía XII*, 101-119.