DIDÁCTICA DE LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS A NIVEL PREUNIVERSITARIO

Andrés Hernández y Yolanda Serres Voisin
Universidad Simón Bolívar. Universidad Central de Venezuela. Venezuela
anhernan9@gmail.com, yolanda.serres.voisin@gmail.com

Resumen. Esta investigación describe una didáctica del proceso de solución de problemas dirigida a estudiantes que realizan cursos de iniciación en carreras científicas y tecnológicas. Esta didáctica está planificada para analizar el proceso de solución de problemas matemáticos, el rol del docente en este proceso y el tipo de problemas que deben resolver los estudiantes. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas, desarrollando o consolidando sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas; y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso.
Palabras clave: estrategias, solución de problemas, rol docente
Abstract. This research describes a teaching of problem solving process aimed at students doing introductory courses in science and technology careers. This teaching is planned to analyze the process of mathematical problem solving, the teacher's role in this process and the type of problems that students must solve. The research is descriptive and exploratory. To do this, it is proposed that students act as problem solvers, developing or strengthening their skills in understanding and solving problems, and that teachers develop teaching strategies to support this process.
Key words: strategies, problem solving, teaching role

Introducción

Planteamiento del problema y del objetivo de la investigación

La solución de problemas es una actividad que desarrollamos en nuestra vida cotidiana, ya que constantemente estamos buscando soluciones a problemas del día a día. Entre los objetivos de la educación matemática está el desarrollar habilidades que permitan a los estudiantes adquirir herramientas para resolver problemas tanto escolares como del contexto. De la revisión de los estudios que ponen énfasis en la aplicación de la resolución de problemas al campo de la enseñanza, sobresalen dos tendencias. En primer lugar, la que se centra en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente. En segundo término surge el papel de la resolución de problemas como instrumento de diagnóstico de errores conceptuales y concepciones alternativas, así como para la evaluación del propio aprendizaje adquirido o del cambio conceptual. En cualquier caso, la realidad pone en evidencia la ausencia de prácticas de metodologías específicas para la resolución de problemas en los programas oficiales y en los libros de texto educativos (Dumas-Carré citado por Perales, 1993).

En nuestro caso se hará énfasis en la necesidad de resolver problemas de un modo eficiente, por considerarlo una importante meta didáctica, que busca la comprensión de los problemas planteados y el desarrollo de estrategias para alcanzar sus soluciones.

El proceso de resolución de problemas en el aula debe considerar cuatro aspectos importantes: 1) la comprensión del problema; 2) los conocimientos matemáticos necesarios para la resolución del problema; 3) el uso de estrategias para la resolución del problema y 4) el papel del docente como mediador del proceso de solución de problemas.

Es por esto que el objetivo de esta investigación es describir una didáctica del proceso de solución de problemas dirigida a estudiantes de nivel preuniversitario, quienes realizan cursos de iniciación para obtener ingreso a la universidad, en carreras científicas y tecnológicas de la Universidad Simón Bolívar (USB) y de la Universidad Central de Venezuela (UCV).

Esta didáctica está planificada para analizar el proceso de solución de problemas matemáticos de los estudiantes, el rol del docente en este proceso y el tipo de problemas que deben resolver estos estudiantes. La investigación es descriptiva y exploratoria. Para ello, se propone que los estudiantes actúen como resolvedores de problemas esto es, que desarrollen o consoliden sus habilidades y destrezas en la comprensión y solución de los problemas. Y que el docente desarrolle estrategias didácticas para apoyar este proceso. Para evaluar el progreso en el proceso de solución de problemas se utilizarán tareas hechas por los estudiantes durante las clases en pareja o individualmente (Charles, Lester y O`Daffer, 1994).

Marco teórico. El proceso de solución de problemas

En cuanto al proceso de resolución de problemas por parte de los estudiantes este trabajo parte del protocolo original de Polya, el cual otros autores como Schoenfeld (1992), han utilizado como base para generar otros protocolos. El modelo de los cuatro pasos para la resolución de un problema propuesto por Polya desde 1965 es el siguiente:

1) Comprender el problema: Aquí se rresume toda la información dada y que se desea determinar. En este paso a los estudiantes se le pueden hacer las siguientes preguntas, ¿Entiendes lo que se dice?, ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?, ¿Distingues cuales son los datos?, ¿Sabes a qué quieres llegar?, ¿Hay suficiente información?, ¿Hay información extraña?, ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

2) Concebir un plan: En este paso se eexpresa la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. Aquí es en donde el estudiante diseña una estrategia, entre las cuales tenemos: ensayo y error, usar una variable, buscar un patrón, hacer una lista, resolver un problema similar más simple, hacer una figura, hacer un diagrama, usar razonamiento directo, usar razonamiento indirecto, resolver un problema equivalente, trabajar hacia atrás, resolver una ecuación, usar casos, buscar una fórmula.

3) Ejecución del plan: en esta fase se implementa la o las estrategias que se escogieron para solucionar completamente el problema o hasta que la misma sugiera utilizar otra estrategia.

4) Examinar la solución obtenida o mirar hacia atrás: consiste en examinar a fondo cálculos y razonamientos matemáticos utilizados, y que la solución corresponda al problema propuesto originalmente.

Schoenfeld incluye en su protocolo una etapa exploratoria previa a la concepción del plan, donde el estudiante explora con algunas estrategias antes de concebir un plan definitivo.

Didáctica de la solución de problemas

El docente en su planificación escoge los problemas que quiere discutir, tiene claro en qué quiere enfatizar la discusión de cada proceso de solución, y tiene algún tipo de registro sobre el proceso de solución de esos problemas seguido por los estudiantes, particularmente de las distintas estrategias de solución utilizadas y de los distintos resultados alcanzados en cada paso del proceso, desde la fase de comprensión hasta el examen a las soluciones obtenidas. La evaluación de la solución obtenida es la fase más débil en estudiantes de nuevo ingreso a la educación superior, quienes generalmente no tienen desarrolladas estrategias de aprendizaje y no están acostumbrados a revisar su proceso de aprendizaje y tener seguridad en su trabajo. En el proceso de solución de problemas lo que hemos observado es que si el estudiante plantea una ecuación o un sistema de ecuaciones como estrategia de solución, el examen de la solución "se reduce" a sustituir el valor encontrado en la ecuación(es) planteada originalmente (lo que también puede generar dificultad si la ecuación no se planteo correctamente), pero si en cambio la estrategia utilizada fue gráfica o numérica, los estudiantes suelen sentirse más inseguros acerca de su solución.

Para apoyar a los estudiantes de nivel preuniversitario en su proceso de solución de problemas es importante que el docente tenga un rol de observador participante, que permita a las y los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático, probar, hacer inferencia, identificar conceptos, procesos y resultados de la matemática del bachillerato necesarios para resolver el problema, sacar cuentas con casos sencillos, y, en caso de que el estudiante no avance en el proceso, entonces el docente hace preguntas abiertas que estimulen la explicación, el ordenamiento de las ideas, el razonamiento, en fin, desarrollar la actitud científica.

En este sentido plantea Barrientos (2010) que el docente es el mediador entre la actitud científica que se debe aprender al resolver un problema y el estudiante; el tipo de ayuda que brinda en la interacción que se establece con el estudiante, o a través de la organización social que haga para la resolución de un problema, debe promover la formación adecuada de la actitud científica y el aprendizaje significativo haciendo que los estudiantes relacionen en su experiencia de resolución de problemas lo que ya saben con lo que tienen que aprender. El docente debe facilitar aprendizajes funcionales, prácticos y conscientes de la actitud científica por parte de los estudiantes, orientándoles para hacer explícito lo que parece tácito o implícito, en otras palabras para que desarrollen sus procesos metacognitivos.

En cuanto a la evaluación del proceso de solución de problemas, como señala Flores (2011) la evaluación en el aula sirve para retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje y mejorarlo en cuanto al desempeño del estudiante y del docente; de manera que se busca que el estudiante mejore en cada paso de la solución de un problema, lo cual hace lento el proceso, y que el docente mejore permanentemente en la mediación del proceso.

Discusión de algunos resultados

El criterio de escogencia de los problemas fue problemas que pueden resolverse a través del planteamiento de una ecuación o de un sistema de ecuaciones de dos incógnitas. Según el programa de las asignaturas: Matemáticas II del Curso de Iniciación Universitaria (CIU) de la USB y Matemáticas del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería (CIFI) de la UCV.

El problema escogido para reportar la investigación es el siguiente:

Cuando abrí mi libro de matemáticas el producto de los números
de las dos páginas que estaban frente de mi era 992.
¿Cuáles son, respectivamente, los números de esas páginas?

Para comprender este problema se necesita saber que los números de página de un libro son consecutivos, y en consecuencia hay que conocer previamente cómo se escribe algebraicamente que dos números son consecutivos.

Este problema permite la modelación a través de una ecuación y a su vez puede ser resuelto por ensayo y error, explorar esta otra estrategia de solución puede ayudar a comprender el problema.

Las estrategias y procedimientos utilizados por los estudiantes para resolver el problema se muestran en la tabla N° 1:

Estrategia/Procedimiento	CIU de la USB	CIFI de la UCV
Modelación de ecuación y solución por factorización simple.		Planteamiento de la ecuación y factorización.
Modelación de ecuación y solución por fórmula cuadrática.	Planteamiento de ecuación y uso de la fórmula cuadrática para	

	resolverla.	
Descomposición factorial	Descomposición de 992 en factores primos, llegando al resultado de 32 por 31, los cuales son números consecutivos. No se planteó ecuación.	Planteamiento de ecuación pero no se usa. Hay presencia del significado de números consecutivos.
Ensayo y error	No se plantea ecuación. Ensayo con números aproximándose a 992, hasta que se consigue el producto exacto.	Planteamiento de ecuación y no se usa. No hay presencia del significado de números consecutivos.

Tabla 1: Procedimientos y estrategias utilizadas por estudiantes preuniversitarios para resolver un problema de uso potencial de ecuaciones.

Se analizaron los procesos de tres estudiantes del CIU encontrando que:

- un estudiante descompuso el número 992 (producto de las páginas del libro) en factores primos, que resulta $992=2^5.31=32.31$, con esto el estudiante responde que las páginas son 31 y 32; evidentemente este es un proceso muy particular, ya que coincidió con que los factores son números consecutivos. De no ser así este procedimiento no servía para resolver este problema. Este procedimiento puede catalogarse como un procedimiento aritmético, ya que no se identifica una incógnita.
- un segundo estudiante resolvió el problema de forma algebraica siguiendo los pasos para resolver un problema por modelación de ecuaciones, que son: a) comprender el problema; b) plantear la ecuación; c) resolver la ecuación, y d) comprender la solución. Esta persona manifestó en el paso a) que tuvo dificultad para comprender el problema, la cual superó gracias a la ayuda del docente. Luego logró identificar la incógnita, plantear la ecuación y resolverla a través de la fórmula cuadrática. Escribe su solución explícitamente, expresando que el resultado es "exacto".
- una tercera persona utilizó el ensayo y error como su estrategia. Este estudiante realizaba multiplicaciones de números consecutivos y se dio cuenta que el producto de los números consecutivos que escogía era muy grande, es por esto que tomó números menores y probó obteniendo ahora productos muy lejos de 992 (p.e. 24 x 25 = 600), aquí notó que debían ser números cercanos a 30, hasta que llegó al resultado de 31 x 32. Este procedimiento también puede catalogarse como un procedimiento aritmético.

Una conclusión significativa del último caso es el desconocimiento por parte de algunos estudiantes de los números cuadrados perfectos y de los procesos de estimación, pues considerando que se trataba de números consecutivos podía ensayarse con cuadrados perfectos cercanos a 992 y así reducir los ensayos, por ejemplo a 30 por 30, 30 por 31; 31 por 31, 32 por

32, y al encontrar que este número es mayor que 992, entonces ensayar con 31 por 32. Como plantea Moya (2001) como consecuencia de la interacción del docente con los estudiantes en este caso surge la necesidad de reflexionar con los estudiantes sobre el tipo de ensayo qué hacen, con qué criterios, en este caso el criterio es usar el concepto de número cuadrado perfecto. Esto es parte del proceso de evaluación de la resolución del problema, que ayuda a mejorar la mediación del docente.

En el caso de los tres estudiantes del CIFI ocurrió lo siguiente:

- el primer estudiante siguió los pasos de modelación a través de una ecuación y resolvió esta por factorización simple: $x(x+1)=992$; $x^2+x-992=0$; $(x+32)(x-31)=0$. Verificó su solución en la ecuación original.
- el segundo estudiante trabajó con la descomposición factorial (procedimiento que puede catalogarse como aritmético) luego de haber planteado la ecuación $x(x+1)=992$ y no usarla (Ver figura N°1).

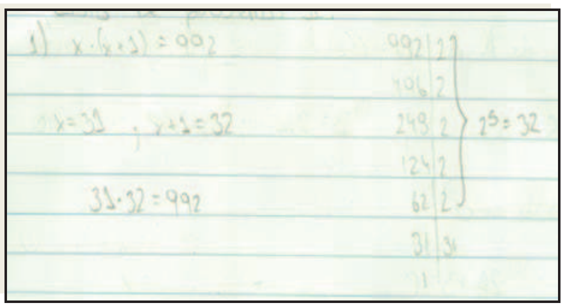


Figura 1: Proceso de solución del problema por descomposición factorial a pesar de haber planteado una ecuación

El estudiante planteó una ecuación, no supo qué hacer con ella, descompuso el número 992 en factores primos, dando como resultado dos números consecutivos, volvió a la incógnita y verificó escribiendo que 31.32= 992. ¿Por qué no resolvió la ecuación? Vale la pena entrevistar personalmente a la persona para averiguarlo.

- un tercer estudiante ensaya luego de haber planteado la ecuación $x.y= 992$, lo cual denota que no hay comprensión del significado de números consecutivos. Llega a la solución y hace un dibujo con la misma, hecho que no ayuda en el proceso de solución pues es una acción posterior a la resolución del problema (Ver figura N°2).

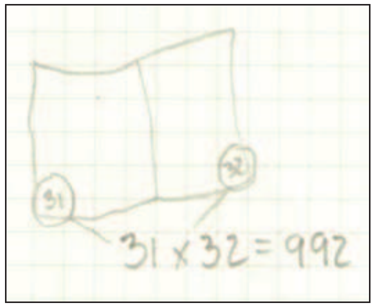
-


Figura 2: Dibujo que no ayuda a resolver el problema

Esta es una representación que puede discutirse respetuosamente con toda la clase luego de resuelto el problema y preguntar cómo puede hacerse una representación antes de resolver el problema que ayude en el proceso de solución (Schoenfeld, 1992).

Conclusiones

En la planificación de la clase donde se discute la resolución de problemas es fundamental la escogencia del tipo de problema de forma tal que se estimule la actitud científica, a través de preguntas, de reflexiones y de solicitud de conclusiones y razonamientos.

La evaluación debe ser realizada por el docente por medio de prácticas evaluativas continuas y con un enfoque que permita analizar el proceso que lleva el estudiante en cuanto a conocimientos adquiridos. Una evaluación que tome en cuenta los procesos de los estudiantes permite modificar las estrategias empleadas en el aula con el fin de apoyar al estudiante en la adquisición del aprendizaje.

Como se planteó anteriormente (Serres, 2000) es necesario elaborar un banco de problemas resueltos por los estudiantes, ya que esto permite apoyar la comprensión del problema e ilustrar las distintas estrategias que pueden usarse para resolver un mismo problema combatiendo la creencia de que en matemática hay un solo camino de hacer las cosas: el camino que escoge el docente.

Referencias bibliográficas

Barrientos, O. (2010). *La actitud científica ante la resolución de problemas matemáticos*. La Paz: IIICAB.

Charles, R., Lester, F. & O`Daffer, P. (1994). *How to evaluate progress in problem solving*, National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Flores, A. H. y Gómez, A. (2009). Aprender matemática, haciendo matemática: la evaluación en el aula. *Educación Matemática*. 21(2). 117-142.

Moya, A. (2001). *Reflexiones sobre la teoría y la práctica de Evaluación en la Educación Matemática*. Retos y Logros. Caracas: UPEL-IJMSM: Subdirección de Investigación y Postgrado.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Serres, Y. (2000). *Aspectos a considerar en un diseño de instrucción centrado en el proceso de solución de problemas matemáticos. Caso del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la UCV*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 13.