

## ESTUDIO DE LA PRIMERA REPRESENTACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Alma Alicia Benítez Pérez y Martha Leticia García Rodríguez  
 CECyT 11, IPN  
 ESIME Zacatenco, IPN  
 albenper@gmail.com, martha.garcia@gmail.com

México

**Resumen.** La presente investigación identifica las estrategias para re-interpretar o modificar la primera representación con la cual se inicia el proceso de resolución de problemas, empleados por estudiantes del primer semestre del Nivel Medio Superior. Para el análisis de la producción de los alumnos se analizaron a través de cuatro momentos, lo cual permitió identificar los indicadores que contribuyeron para valorar los procedimientos desarrollados. A nivel de resultados, hay un desarrollo manifiesto de capacidades y habilidades, así como un desempeño eficiente en el uso de conceptos en las diferentes representaciones. Los registros y las transcripciones de las clases fueron analizados considerando un modelo particular de la investigación cualitativa, empírico / experimental.

**Palabras clave:** representaciones, conexiones, tratamientos, estrategias

**Abstract.** This research identifies strategies to re-interpret or modify the first representation which starts the process of problems solving, students employed by the first half of Middle Level Superior. For the analysis of the production of the students were analyzed through four stages, which allowed us to identify the indicator that contributed to evaluate the procedures developed. In terms of results, there is a clear development of skills and abilities, and efficient performance in the use of concepts in different representations. The records and transcripts of classes were analyzed considering a particular model of qualitative research, empirical/experimental.

**Key words:** representations, connections, treatments, strategies

### Introducción

Los programas de estudio a nivel bachillerato y particularmente los programas de los CECyT's (Centro de Estudios Científicos y Tecnológico), mencionan la importancia de promover el desarrollo de competencias matemáticas, lo que implica el fortalecimiento de habilidades del pensamiento tales como: análisis, interpretación y síntesis para impulsar la elaboración de conjeturas, la identificación de invariantes y la posibilidad de su generalización. En este proceso de construcción, las representaciones adquieren un papel importante, pues de ellas depende la estructura cognitiva en el estudiante.

El dominio de los conceptos matemáticos está directamente relacionado con el conocimiento de sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como con las reglas internas que las estructuran y en su articulación. Desde ésta perspectiva el papel que adquiere las representaciones en la resolución de problemas es fundamental, ya que dinamiza el proceso de solución permitiendo al estudiante dar sentido a la información que le brinda el problema y operar con ella hasta dar respuesta a la exigencia del mismo. Específicamente, la primera representación que se emplea para dar inicio a la resolución de la solución es definitiva, pues es el puente entre la percepción del problema y el proceso de solución, durante éste proceso influyen varios elementos como son: el contexto de la situación, la formulación del problema, las ideas previas del

estudiante, las condiciones dentro de las cuales el problema está inmerso etc. Elementos que son determinantes para que el estudiante pueda re-interpretar o modificar la primera representación, cuyo tratamiento conlleva a identificar información para hacer inferencias y seleccionar los factores relevantes que posteriormente beneficiará en la abstracción del análisis e interpretación de las partes y su integración, dando lugar a la síntesis y a la conclusión del problema. Por lo que la primera representación tendrá subsecuentemente el acompañamiento de múltiples representaciones diseñadas con la finalidad de enriquecer el contenido que contribuya en el proceso, por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar estrategias de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones diseñadas en el curso de la resolución del problema estarán influenciadas por el tratamiento que se realice en la primera representación.

La presente investigación tuvo como propósito identificar y analizar las estrategias que el alumno emplea, cuando se promueven actividades que ponderan el uso de múltiples representaciones, así como el planteamiento de preguntas y la reformulación del problema, que apoyen la re-interpretación o modificación de la primera representación, con la finalidad de enriquecer su tratamiento y la posibilidad de fortalecer el proceso de solución de la situación.

### Marco teórico

Durante las dos últimas décadas se ha manifestado el interés por el uso de las representaciones por parte de los maestros y estudiantes como herramienta para abordar la resolución de problemas (Castro, 2008; DeBellis y Goldin, 2006), además, el uso de múltiples representaciones pueden ser utilizadas para impulsar de manera reflexiva la comprensión de conceptos y procesos (Cuoco y Curcio, 2001). De hecho Rico (2000) considera que el éxito en matemáticas implica el uso de diversas representaciones mentales, que comprendan varios aspectos del concepto relacionados entre sí. De ahí la importancia de la articulación de las diferentes representaciones.

El buen uso de las representaciones aporta un conjunto flexible de herramientas para resolver problemas y apreciar la consistencia de la matemática, particularmente el aprendizaje en el Nivel Medio Superior (NMS) destaca que los alumnos logren tener buen conocimiento de las distintas formas de representar y con ello la posibilidad de su articulación, permitiendo el fortalecimiento de la elección de la representación idónea en forma espontánea durante la resolución de problemas. En la elección de las representaciones apropiadas por parte de los estudiantes ofrece la posibilidad de aprender a valorar las ventajas y desventajas de las diferentes formas de representación (Schultz y Waters, 2000), y a emplearlas como herramientas para la resolución de problemas. En este sentido el primer acercamiento con la primera representación que inicia el proceso de resolución del problema en operación, sigue un acompañamiento de representaciones

diseñadas con la misma finalidad del proceso. Por ejemplo: ilustrar el enunciado del problema, formalizar el problema dentro del dominio matemático, aplicar una estrategia de solución etc., de tal manera que el acompañamiento de las representaciones gráficas diseñadas en el curso de la resolución del problema está determinado por la primera representación (Benítez, 2009).

### Metodología

El propósito de la experiencia educativa fue proporcionar al estudiante diversas situaciones para explorar la información que encierran las representaciones, empleando tratamiento que permitieron evidenciar su contenido, para re-interpretar o modificar la primera representación. La experiencia educativa se llevó a cabo con un grupo de 50 alumnos (grupo IIM17) del C.E.C.y T. No. “Wilfrido Massieu” del NMS, que cursaban el primer semestre del ciclo escolar. Las edades de los alumnos fluctuaban entre 15-16 años. Se impulsó la metodología de la resolución de problemas en el aula, a partir de las ideas previas del estudiante se llevó a cabo diversas discusiones a nivel equipo y en plenaria, con la finalidad de verificar y resaltar su conjeturas lo cual permitió que alumno expusiera sus explicaciones para justificar las afirmaciones que consideró pertinentes en la situación problemática. La observación del estudio se llevó a cabo durante un semestre escolar (18 semanas) para detectar las cualidades del fenómeno de estudios. Las observaciones en el estudio se desarrollaron a nivel global registrando los siguientes eventos: Bitácora del curso. Al término de cada sesión el investigador anotaba los elementos más relevantes, para su análisis, lo cual permitía reorganizar o bien estructurar la siguiente sesión y grabaciones de las clases, específicamente cuando los equipos expusieron su trabajo ante el grupo, para validar sus procedimientos y resultados.

La triangulación de la información se fundamentó en los resultados e interpretación del estudio. Lo anterior se obtuvo a través de los hallazgos que se encontraron en la fuente A (reporte escrito por equipo), fuente B (discusión grupal), fuente C (reportes escritos de actividades extramuro), y con la fuente D (observaciones en clase), permitiendo comparar información proveniente de diferentes escenarios.

Diseño de las Actividades. Se realizó previamente un análisis del contenido matemático a tratar en el curso. El propósito fue identificar las líneas principales durante la experiencia, las cuales son: lenguaje algebraico, modelación, ecuaciones y funciones, permitiendo el planteamiento de modelos lineales y cuadráticos en situaciones concretas. Estas líneas fueron la guía para diseñar las actividades. Algunas de las actividades fueron piloteadas en el curso de álgebra, anterior al de la experiencia, para examinar su potencial o bien las dificultades que presentaban lo alumnos.

## Análisis

Los elementos que guían el análisis fueron:

- ❖ Identificar el tratamiento de la primera representación en la resolución de problemas.
- ❖ Identificar las estrategias que el alumno del Nivel Medio Superior emplea para enriquecer la primera representación.

A continuación se muestra la actividad que los alumnos desarrollaron, la cual fue videograbada:

LOS CICLISTAS: De dos puntos A y B que se encuentran separados una distancia de 105 km, salieron simultáneamente dos ciclistas al encuentro uno de otro. Se encontraron 1 h 45 min después de iniciado el recorrido. Cada uno siguió su camino sin detenerse. Después de 3 min del encuentro el primer ciclista que iba a 40 km/h, se encontró con otro ciclista que venía a su encuentro por el mismo camino. El tercer ciclista luego de encontrarse con el primero, continuó su camino sin detenerse y alcanzó al segundo ciclista en el punto C, en el cual se hubiera encontrado el primer y el segundo ciclista, si la velocidad del primero hubiera sido 20 km/h menos y la del segundo 2 km/h más original.

- a) *¿Cuáles son las distancias que recorren los ciclistas 1 y 2 durante 1 h 45 min?*
- b) *¿Cuál es la distancia entre el punto donde se encuentran el primer ciclista y el segundo, y el punto donde se encuentra el primer ciclista con el tercer?*
- c) *¿Cuáles son sus velocidades?*
- d) *¿Cuál es la modificación de las velocidades originales de los ciclistas?*
- e) *¿Cuál es la distancia recorrida en 3 minutos por el segundo ciclista?*
- f) *¿Cuál es la distancia recorrida por el segundo ciclista para llegar al punto C?*
- g) *¿A qué velocidad iba el tercer ciclista?*

Durante el análisis de las actividades se identificaron cuatro momentos:

- ❖ El primer momento referida a una fase de apropiación en la cual el alumno atiende aspectos que son parciales, aunque relevantes, ya que inicia construyendo preguntas parciales a la situación.
- ❖ El segundo momento construye la representación pictórica, la cual opera y modifica a través de la discusión con sus compañeros, lo que le permite reexaminar la situación para establecer nuevas preguntas.
- ❖ El tercer momento se presenta el descubrimiento de nueva información y reformulación del problema original, para enriquecer la representación o bien para re-interpretar la situación.

- ❖ El cuarto momento se presenta cuando el estudiante establece conexiones con la información ya identificada y la formulación de nuevos eventos en la situación.

### Análisis y Resultados

En términos generales los alumnos identificaron información parcial de la lectura del texto para describir la trayectoria de los ciclistas durante el primer momento. Para el segundo momento el estudiante empleó la representación pictográfica explorando la situación a través de episodios, lo que contribuyó para identificar el recorrido de los ciclistas, la Figura 1 muestra la representación pictográfica bajo el supuesto de que el segundo ciclista partió del punto B y el primero partió del punto A.

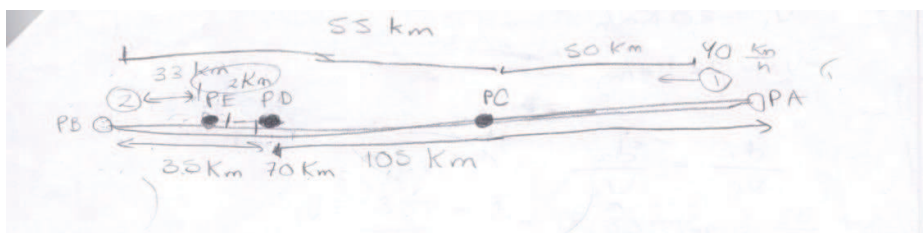


Figura 1. Exploración de la Representación Pictográfica

Al intervenir el profesor los alumnos identifican nueva información, lo que les permitió releer el problema nuevamente. Los alumnos continuaron explorando la representación gráfica pero ahora explorando la representación gráfica (Ver Figura 2). En este punto se consideró que el problema planteado aún estaba vago e impreciso, lo que originó que el profesor presionará a los alumnos para replantear la situación.

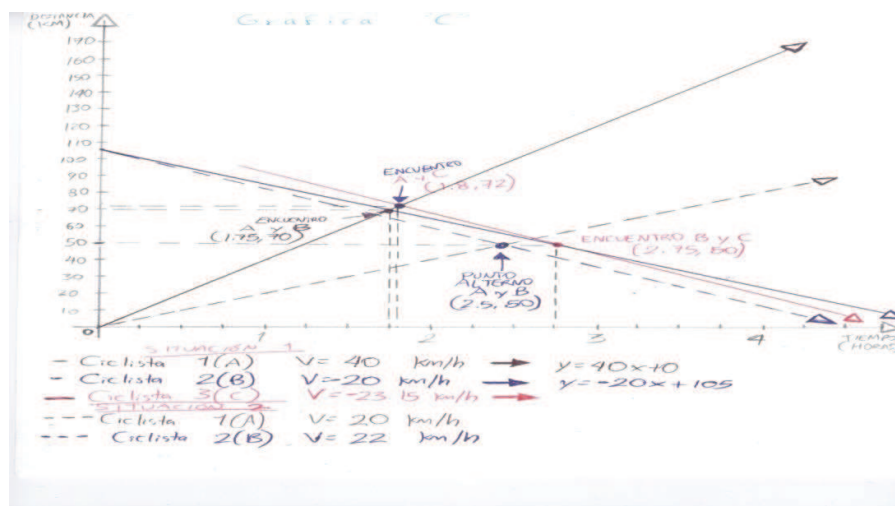


Figura 2. Exploración de la Representación Gráfica

Durante el tercer momento el alumno reconsideró la información obtenida y re-interpretó la información para construir la representación gráfica, en este momento surge una idea que será importante en el seguimiento del problema, como lo mencionan:

Martín: *Bueno del 105 y aquí del punto 0, van a coincidir en algún punto en la hora 1.75, determinamos que coinciden a la altura de 70 km; es donde ambos se encuentran. Pero trazamos unas gráficas y nos dio unas figuras como estas, como la línea verde y la línea azul; esto ¿Qué nos representa? que el ciclista A su distancia recorrida es hacia arriba, en cambio el ciclista B iba en disminución de la distancia recorrida para encontrarse aquí, cada uno iba en sentido contrario y se encontraron a los 70 km a la hora con 45 minutos después de haber iniciado sus resultados.*

Lo cual permitió la re-interpretación del contenido de la representación gráfica para construir las expresiones algebraicas (Ver Figura 3) que modelan el comportamiento de los movimientos basados en la información obtenida, para conformar el cuarto momento en donde el alumno emplea al menos dos representaciones para su exploración.

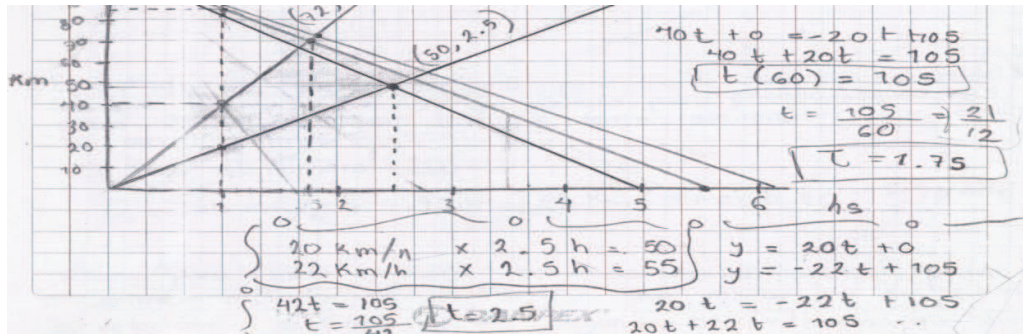


Figura 3. Exploración de la Representación Gráfica y Algebraica

La nueva información no es conectada con la información previamente identificada, el cambio de perspectiva en los estudiantes se produce por el interrogatorio del docente y por la interacción con las tareas. Ambos elementos propician que los alumnos se den cuenta que la nueva información ocasiona la modificación del problema original. La formulación parece estar ligado con el seguimiento el problema, esto se aprecia cuando el alumno está manipulando los movimientos de los ciclistas y explica los diferentes episodios. El proceso de formulación de problemas muestra una complejidad pues surgen dificultades o concepciones falsas que obstaculizan la formulación del problema. El cambio de percepción del evento para identificar nuevos aspectos no se presenta de manera inmediata, no obstante durante la misma interacción fue posible superar las dificultades que se presentan. La formulación del problema aparece estar entrelazado al seguimiento, es decir, surge conjetura para ser interpretada por los estudiantes de lo cual surge un abanico de preguntas que permitirán robustecer la representación o bien emplear otra representación para enriquecer

la conjetura. El lenguaje fue otro factor utilizado por los alumnos, para expresar las ideas que van emergiendo en el proceso de formulación.

A continuación se presentan los cuatros momentos con sus respectivos indicadores identificados durante la experiencia (Ver Cuadro I).

Cuadro 1. Identificación de los indicadores durante la Experiencia

Momentos	Indicadores
<b>I</b>	Representaciones Verbales <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Lectura en voz alta el texto.</li> <li>❖ Los alumnos leen el texto en voz baja.</li> <li>❖ El estudiante expone el problema con su lenguaje personal.</li> </ul>
<b>II</b>	Representación Pictórica <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Dibuja con lápiz y papel la representación pictográfica.</li> <li>❖ Opera con la representación</li> <li>❖ Verbaliza las diferentes representaciones pictográficas construidas.</li> </ul>
<b>III</b>	Representación Algebraica <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Expone una expresión algebraica e identifica las variables.</li> <li>❖ Verbaliza las relaciones y menciona las posibles formas de resolverla.</li> <li>❖ Modifica o elimina la expresión algebraica</li> </ul> Representación Gráfica <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Expone una gráfica e identifica algunos puntos</li> <li>❖ Establece el comportamiento de la situación.</li> <li>❖ Verbaliza las relaciones y menciona el comportamiento del trazo.</li> <li>❖ Modifica o elimina el trazo</li> </ul> Representación Numérica <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Establece diferentes tablas numéricas.</li> <li>❖ Propone tratamientos para extraer información.</li> <li>❖ Verbaliza los resultados y propone posibles formas de resolución.</li> </ul>
<b>IV</b>	Conexiones entre la Representaciones Verbal-Pictórica. <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Establece conexiones entre la representación pictórica con su lenguaje personal.</li> <li>❖ Transforma o modifica una representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.</li> <li>❖ Establece relaciones entre el enunciado y una representación pictórica,</li> <li>❖ Representa elementos pictóricos mientras lee el enunciado del problema.</li> </ul> Conexiones entre la representaciones pictográfica- simbólica. <ul style="list-style-type: none"> <li>❖ Formula una expresión desde una representación pictórica.</li> <li>❖ Establece relaciones entre una expresión simbólica y una representación pictórica</li> <li>❖ Realiza cambios la representación pictórica construida debido a resultados obtenidos</li> </ul>

simbólicamente.

- ❖ Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en representación pictórica o a una nueva representación pictórica

#### Conexiones entre las representaciones gráfica –algebraica

- ❖ Construye una representación gráfica a partir del texto.
- ❖ Establece una expresión algebraica del trazo.
- ❖ Realiza cambios en la expresión algebraica de acuerdo con el comportamiento del trazo.
- ❖ Modifica la expresión algebraica.

#### Conexiones entre las representaciones numérica –algebraica-gráfica

- ❖ Identifica elementos en las representaciones
- ❖ Establece conexiones entre el contenido de las representaciones.
- ❖ Modifica el contenido de las representaciones.
- ❖ Realiza cambios la representación numérica construida debido a resultados obtenidos en las representaciones algebraica y gráfica.
- ❖ Modifica expresiones simbólicas debido a resultados obtenidos en las representaciones numérica y gráfica.

#### Principales hallazgos:

- ❖ Identificación de la primera representación: verbal y pictórica
- ❖ Transformación o modificación de la representación pictórica de acuerdo a una nueva interpretación del enunciado.
- ❖ Reconocimiento de la formulación de una expresión o parte de ella con lápiz y papel desde una representación pictórica o realización de una representación pictórica desde una expresión simbólica.
- ❖ Reconocimiento de cambios o eliminación de la representación pictórica previamente construida debido a resultados obtenidos simbólicamente.
- ❖ Asignación de símbolos a una representación pictórica.
- ❖ Transforma o modifica una expresión simbólica debido a una nueva interpretación del enunciado.
- ❖ Reformula el enunciado de una manera diferente debido a algún resultado obtenido en una expresión simbólica.
- ❖ Reconocimiento de una variable a alguna parte del enunciado.

Las autoras agradecen el apoyo otorgado por la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN, a través de las investigaciones con números de registro 20130860 y 20111060



### Referencias bibliográficas

- Benítez, A. (2009). Estudio de la primera representación gráfica de ecuaciones algebraicas en contexto. *Revista Innovación Educativa* 9(46), 41-50.
- Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Cuoco A. y Curcio, F. (Eds.) (2001). *The roles of representations in school mathematics*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics
- DeBellis, V. y Goldin, G. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: a representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 131-147.
- Luego, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Badajoz: SIEM.
- Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *IV Simposio SEIEM*. Huelva, España.
- Schultz J. y Waters M. (2000). Why representation? *Mathematics Teacher*, 3(6), 448-453.